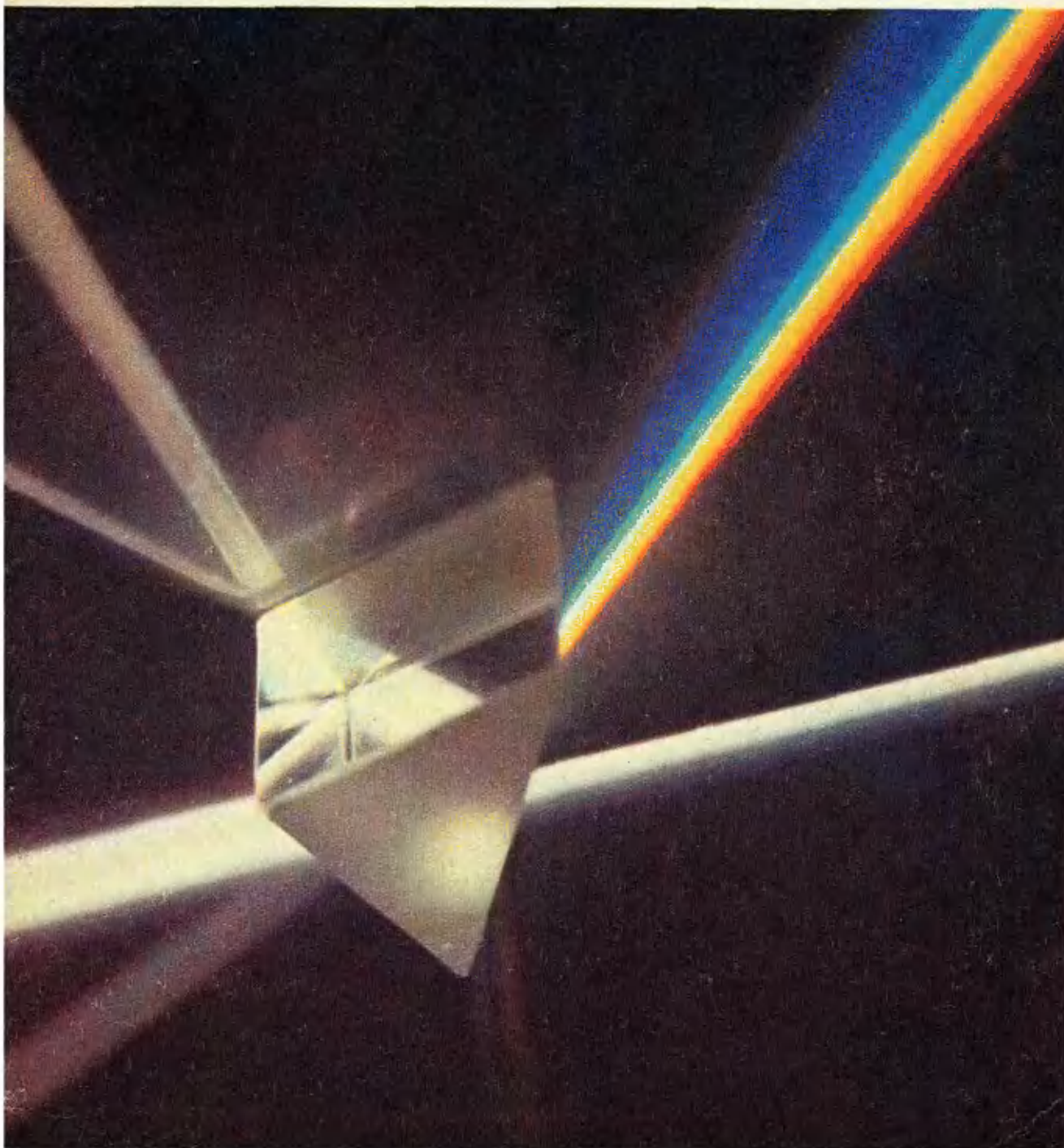


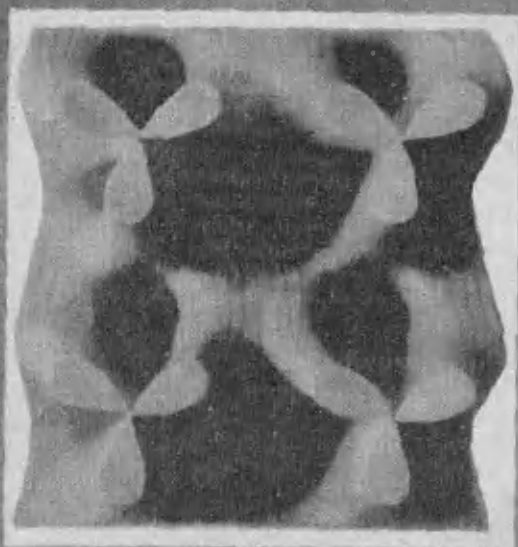
ISSN 0130-2221

Квант

3
1985

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*

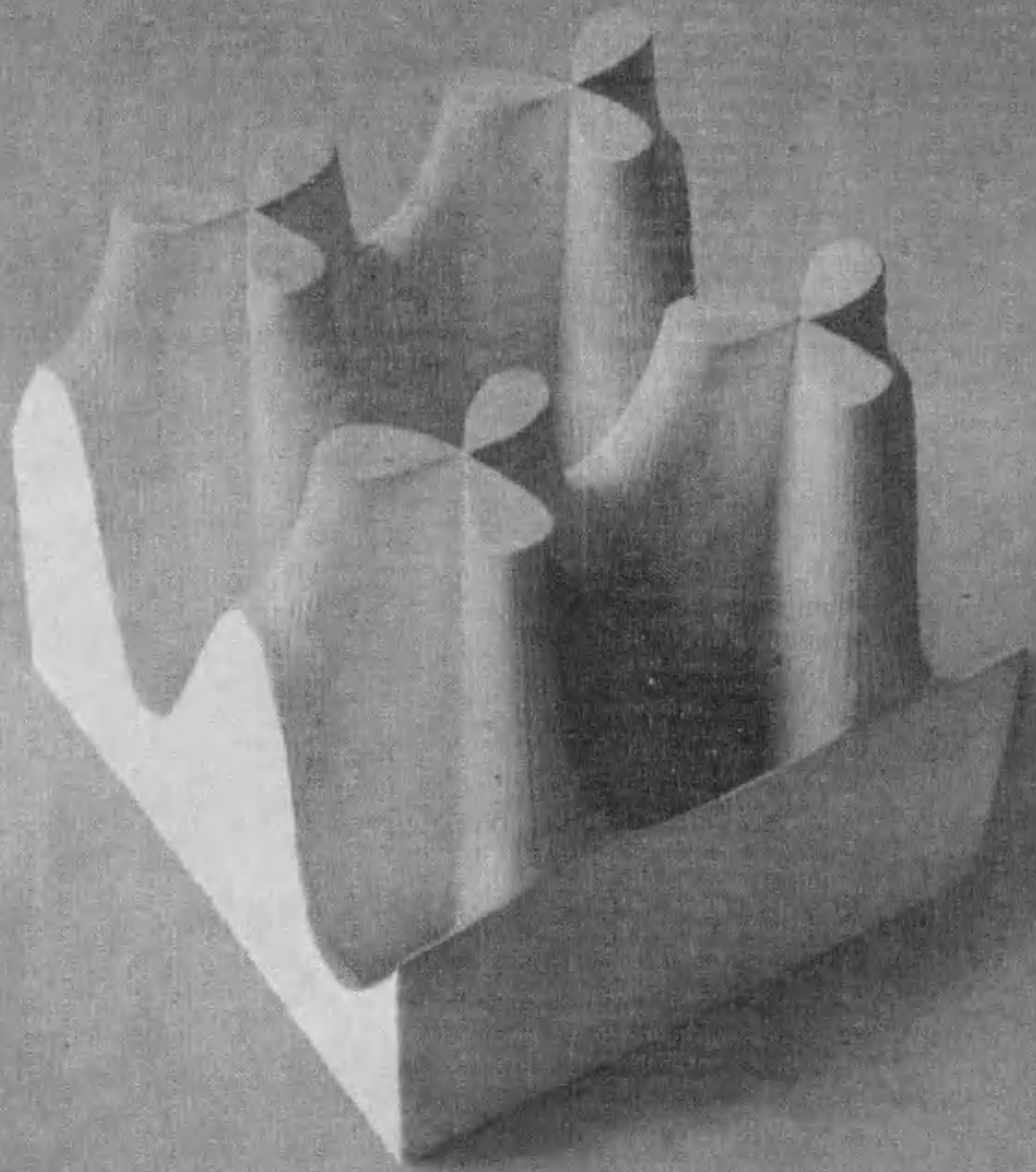




Здесь показана модель поверхности
из уникальной коллекции, хранящейся
в Московском государственном универси-
тете. Модели коллекции были
изготовлены в Германии
в начале века под руководством
известного немецкого
математика Фердинанда Клейна.
Изображенная поверхность
это геометрический
объем, виден из интегралов вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-ax^2 + b}}$$

и комплексный интеграл.
Соответствующие преобразования —
тогда называемые
эллиптические функции — имеют
многочисленные приложения
к геометрии, теории чисел,
анализу и механике.





Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы



В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

2	<i>Л. С. Понтригин.</i> Обобщение чисел	<i>L. S. Pontriagin.</i> Generalized numbers
6	<i>В. А. Фабрикант.</i> Парадокс Вавилова	<i>V. A. Fabrikant.</i> The Vavilov paradox
8	<i>А. С. Штейнберг.</i> Репортаж из мира сплавов	<i>A. S. Shteinberg.</i> Report from the world of alloys
15	Лаборатория «Кванта» <i>А. В. Бялко.</i> Пинг-понг... в умывальнике	Kvant's lab <i>A. V. Byalko.</i> Ping-pong... in the sink
18	Школа в «Кванте» Физика 9, 10	Kvant's school Physics 9, 10
22	Избранные школьные задачи	Selected school problems
23	«Квант» для младших школьников Задачи	Kvant for younger school children Problems
24	Задачник «Кванта»	Kvant's problems
25	Победители конкурса «Задачник «Кванта»	Kvant problem solving contest prizewinners
28	Задачи M911—M915; Ф923—Ф927	Problems M911—M915; P923—P927
39	Решения задач M891—M895; Ф903—Ф907	Solutions M891—M895; P903—P907
41	<i>Н. Б. Васильев.</i> Задача о восьми точках	<i>N. B. Vasiliev.</i> The eight-point problem
41	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
32	Калейдоскоп «Кванта»	Kvant's kaleidoscope
43	Практикум абитуриента <i>И. Г. Габович, П. И. Горнштейн.</i> Сколько корней имеет уравнение?	College applicant's section <i>I. G. Gabovich, P. I. Gornshtein.</i> How many roots does the equation have?
47	Информация Латвийские открытые олимпиады и летняя школа «Альфа»	Information Latvian open olympiads and the "Alpha" summer school
50	Варианты вступительных экзаменов	College entrance examination problems
57	Ответы, указания, решения Наша обложка (55)	Answers, hints, solutions Our cover page (55)
	«Квант» улыбается (49)	Kvant smiles (49)
	Шахматная страничка	The chess page
	Возвращение фигур (3-я с. обложки)	Returning pieces (3rd cover page)
	Победители шахматного конкурса 1984 года (56)	1984 chess contest prizewinners (56)

На фотографии, воспроизведенной на первой странице обложки, можно увидеть, как призма разлагает белый свет в спектр.

Обобщение чисел

Академик Л. С. ПОНТЯГИН

В этой статье продолжен рассказ о возможных обобщениях понятия числа, начатый в предыдущем номере «Кванта»^{}). Здесь показано, что двигаться дальше в этом направлении, то есть придумывать дальнейшие обобщения чисел, отличные от рассмотренных в предыдущей статье, невозможно.*

§ 6. Теорема Фробениуса

Пусть L — некоторая совокупность величин x , которые записываются в форме

$$x = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n, \quad (50)$$

где $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ — действительные числа (координаты величины x), а символы

$$i_1, i_2, \dots, i_n \quad (51)$$

называются *мнимыми единицами*.

В совокупности L определены сложение и умножение. Пусть y — некоторая другая величина совокупности L

$$y = y_0 + y_1 i_1 + \dots + y_n i_n. \quad (52)$$

Величины x и y считаются *равными* тогда и только тогда, когда их координаты равны, то есть имеет место равенство

$$x_0 = y_0, x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n. \quad (53)$$

Сложение величин x и y происходит по правилу

$$x + y = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) i_1 + \dots + (x_n + y_n) i_n. \quad (54)$$

Таким образом, величины из L складываются покоординатно. Величины из L можно и умножать на любое действительное число, тоже покоординатно:

$$\lambda x = \lambda x_0 + (\lambda x_1) i_1 + \dots + (\lambda x_n) i_n.$$

Для того чтобы задать правило умножения величин x и y из L , мы должны прежде всего принять, что действительные числа перестановочны с мнимыми единицами (51), имеющимися в L , то есть при перемножении

выражений (50) и (52) обычным образом раскрываются скобки и группируются члены, в частности, $(x_1 i_1) \times (y_2 i_2) = (x_1 y_2) (i_1 i_2)$ и т. п. Кроме того, нужно определить, по какому правилу перемножаются мнимые единицы (51), например указать, чему равно $i_1 i_2$. При этом предполагается, что произведение двух любых мнимых единиц системы (51) есть некоторая величина из L , однако коммутативности умножения мнимых единиц мы не требуем. Результат Фробениуса заключается в том, что совокупность величин L совпадает либо с совокупностью всех действительных чисел, в этом случае каждая величина записывается в форме $x = x_0$, либо с совокупностью всех комплексных чисел, в этом случае каждая величина из L записывается в форме

$$x = x_0 + x_1 i, \quad (55)$$

либо с совокупностью всех кватернионов, в этом случае величина x из L записывается в форме

$$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k. \quad (56)$$

§ 7. Несколько вспомогательных утверждений

При доказательстве теоремы Фробениуса я буду считать известным понятие *векторного пространства R^m произвольной размерности m* ^{*}). Напомним, что каждый вектор пространства R^m задается последовательностью из m действительных чисел, называемых *координатами* вектора. В этом пространстве определено сложение векторов, которое происходит покоординатно, *умножение вектора на действительное число*, при котором все координаты вектора умножаются на это действительное число. *Нулевым* вектором называется вектор, все координаты которого равны нулю.

Пусть

$$u_1, u_2, \dots, u_k \quad (57)$$

— некоторая совокупность векторов пространства R^m . Векторы (57) называются *линейно зависимыми*, если имеются действительные числа a_1, a_2, \dots, a_k , не все равные нулю, такие, что

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = 0. \quad (58)$$

Результат, которым я воспользуюсь здесь без доказательства, заключается

^{*}) Необходимые сведения о векторных пространствах можно прочитать в Дополнении к этой статье (с. 5)

^{*}) См. «Квант», № 2, с. 6.

в следующем. В векторном пространстве размерности t всякая система векторов из k штук, где $k > t$, линейно зависима.

Перейдем теперь к подготовительной части доказательства теоремы Фробениуса. Величину, входящую в совокупность величин L , будем считать действительным числом, если только ее координата x_0 отлична от нуля, остальные же равны нулю. Выберем из L такие величины z , которые удовлетворяют следующему условию: z^2 есть действительное неположительное число, то есть либо оно отрицательное, либо равное нулю. Совокупность таких величин обозначим через I . Заметим, что множество R действительных чисел и множество I имеют лишь один общий элемент — нуль.

Докажем теперь следующее:

Каждая величина x из L может быть представлена в виде суммы

$$x = a + z, \quad a \in R, \quad z \in I \quad (59)$$

единственным образом.

Для доказательства этого утверждения составим последовательность величин

$$1, x, x^2, \dots, x^{n+1}, \quad (60)$$

то есть последовательность степеней величины x , начиная от нулевой до $n+1$. Так как последовательность (60) содержит $n+2$ величины, а размерность векторного пространства L равна $n+1$, то величины (60) линейно зависимы. А это значит, что существует многочлен $f(u)$ некоторой переменной u с действительными коэффициентами, корнем которого является x , то есть выполнено условие

$$f(x) = 0. \quad (61)$$

Так как x есть корень многочлена $f(u)$, число x будет корнем неприводимого многочлена с действительными коэффициентами степени один или два, как это было доказано в конце § 5. Если этот неприводимый многочлен имеет степень один, то есть имеет вид $u - a$, где a — действительное число, то $x - a = 0$, и, следовательно, x есть действительное число a . Если неприводимый многочлен $q(u)$ имеет вторую степень и его корни не являются действительными, то его легко преобразовать к виду

$$q(u) = (u - a)^2 + b, \quad (62)$$

где b — положительное число. Так как x является корнем этого многочлена, $(x - a)^2 = -b$ и x записывается в форме

$$x = a + z,$$

где a — действительное число, а $z \in I$, ибо $z^2 = -b$. Таким образом, формула (59) доказана.

Докажем теперь, что слагаемые a и z в разложении (59) однозначно определены величиной x . Это утверждение легко проверяется в случае, когда x — действительное число, так как тогда $z = x - a$, а R и I имеют лишь один общий элемент — нуль, так что z есть нуль. Допустим, что наряду с разложением (59) имеет место другое разложение:



Герман Грассман (1809—1877), немецкий математик, физик и филолог, создатель общего понятия векторного пространства и (наряду с А. Кейли и У. Гамильтоном) теории кватернионов.

$$x = a_0 + z_0. \quad (63)$$

Случай, когда одна из величин z или z_0 равна нулю, нами уже разобран. В дальнейшем будем считать, что они обе отличны от нуля. Из соотношений (59) и (63) вытекает равенство

$$z = z_0 + (a_0 - a).$$

Возводя это соотношение в квадрат, получаем

$$z^2 = z_0^2 + 2z_0(a_0 - a) + (a_0 - a)^2. \quad (64)$$

Так как z^2 и z_0^2 — действительные числа, из этого соотношения вытекает, что произведение $z_0(a_0 - a)$ есть действительное число. Так как z_0 не равно нулю, это возможно лишь тогда, когда $a_0 - a = 0$. Таким образом, единственность разложения (59) установлена.

Заметим, что наряду с любым элементом z из множества I в него входит произведение этого элемента на любое действительное число. Наряду с элементом $z \neq 0$ в I входит и элемент z^{-1} , обратный к z . Запишем это в виде формул:

$$\text{При } a \in R, \quad z \in I \text{ имеем } az \in I. \quad (65)$$

$$\text{При } 0 \neq z \in I \text{ имеем } z^{-1} \in I. \quad (66)$$

Докажем теперь следующее утверждение:

I есть линейное пространство в отношении действительных чисел, то есть наряду с двумя величинами u и v из I в I входит также их линейная комбинация с действительными коэффициентами:

ентами a и b . В виде формулы запишем это утверждение так:

$$\text{При } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}; u \in I, v \in I \text{ имеем } au + bv \in I. \quad (67)$$

Для доказательства последнего утверждения нам достаточно рассмотреть случай, когда a и b не равны нулю, так как случай, когда хотя бы одно из этих чисел равно нулю, содержится в уже доказанном утверждении (65). В силу разложения (59) имеем

$$au + bv = z_1 + a_1, \text{ где } z_1 \in I, a_1 \in \mathbb{R}. \quad (68)$$

Возведем соотношение (68) в квадрат. Тогда мы получим

$$a^2u^2 + b^2v^2 + ab(uv + vu) = 2a_1z_1 + a_1^2 + z_1^2. \quad (69)$$

В силу разложения (59) мы имеем

$$uv + vu = z_0 + a_0, \text{ где } z_0 \in I, a_0 \in \mathbb{R}. \quad (70)$$

Здесь величины z_0 и a_0 не зависят от чисел a и b , а зависят лишь от u и v . В силу единственности разложения (59) из (68) и (70) вытекает равенство

$$abz_0 = 2a_1z_1. \quad (71)$$

А так как числа a и b оба предполагаются не равными нулю, мы получаем

$$z_0 = \frac{2a_1}{ab} z_1. \quad (72)$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\text{если } z_0 \neq 0, \text{ то } a_1 \neq 0. \quad (73)$$

При этом $a_1 \neq 0$ при любых значениях a и b , так как z_0 не зависит от a и b . Принимая во внимание последнее равенство, мы можем переписать соотношение (68) в виде:

$$au + bv = cz_0 + d, \quad (74)$$

где $c = ab/(2a_1)$ — не равное нулю действительное число. Выберем теперь два каких-нибудь числа a' и b' , не пропорциональные a и b , то есть такие, чтобы не имело место равенство

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}. \quad (75)$$

Тогда в силу доказанного мы имеем

$$a'u + b'v = c'z + d', \quad (76)$$

где число c' не равно нулю. Вычтем теперь из соотношения (74) соотношение (76), умноженное на такое действительное число α , чтобы выполнялось равенство $c - \alpha c' = 0$. Тогда мы будем иметь

$$a''u + b''v = d'', \quad (77)$$

где a'' , b'' и d'' — действительные числа. Или, иначе,

$$a''u = -b''v + d''. \quad (78)$$

Так как левая часть этого равенства принадлежит I , в правой части этого равенства должен быть элемент из I (в силу единственности разложения (59)), то есть $d'' = 0$. Мы приходим к выводу, что векторы u и v пропорциональны между собой. Для этого случая наше утверждение (67) тривиально. Таким образом, утверждение (67) доказано.

Из доказанного следует, что в соотношении (68) действительное число a_1 всегда равно нулю и, следовательно, в силу соотношения (72) величина z_0 также всегда равна нулю. И поэтому

$$uv + vu = a_0 \quad (79)$$

есть действительное число. Из этого

мы сделаем важный для дальнейшего вывод:

$$\text{При } u \in I \text{ и } u^2 = \alpha \neq 0; v \in I \text{ и } v^2 = \beta \neq 0; uv \in I \text{ имеем } uv = -vu. \quad (80)$$

Действительно,

$$uvu = u\beta u = \alpha\beta.$$

Поэтому мы получаем

$$vu = \alpha\beta(uv)^{-1}, \quad (81)$$

и, следовательно, в силу (65) и (66), $vu \in I$, так как $uv \in I$. Таким образом, в силу результата (67)

$$uv + vu \in I.$$

Но, будучи действительным числом (см. (79)), величина $uv + vu$ равняется нулю. Таким образом, соотношение (80) доказано.

§ 8. Доказательство теоремы Фробениуса

Если множество I содержит только нуль, то L совпадает с множеством \mathbb{R} всех действительных чисел, в него входящих, и теорема Фробениуса доказана.

Если в I есть элемент $z \neq 0$, то, выбирая должным образом действительное число α , найдем величину

$$i = \alpha z,$$

удовлетворяющую условию

$$i^2 = -1.$$

Если любой другой элемент из I пропорционален i с действительным коэффициентом, то множество L совпадает с множеством всех комплексных чисел вида

$$x = a_0 + a_1 i. \quad (82)$$

Допустим теперь, что I не совпадает с множеством всех чисел вида $x = a_1 i$. Пусть z — некоторая величина из I , не пропорциональная i . Тогда мы имеем

$$iz = b + z_0$$

(см. (59)), где $z_0 \in I$ и $b \in \mathbb{R}$; здесь $z_0 \neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $z = -bi$, то есть z было бы пропорционально i . Положим теперь $j = a(z + bi)$. Тогда $0 \neq ij \in I$ при произвольном действительном $a \neq 0$. Число a выберем так, чтобы $j^2 = -1$. Таким образом, мы нашли в I две величины i и j , удовлетворяющие условиям

$$i^2 = j^2 = -1; ij = k \in I. \quad (83)$$

Теперь из соотношения (80) следует, что

$$ij = -ji. \quad (84)$$

Из этого уже легко вытекают нижеследующие соотношения:

$$k^2 = -1; ki = -ik = j; jk = -kj = i.$$

Таким образом, для величин i, j, k (85)

выполнены все условия, имеющие место для кватернионных единиц (см. «Квант» № 2, с. 11). Если теперь любой элемент z из I линейно зависит от величин i, j, k , то L совпадает с множеством всех кватернионов.

Остается рассмотреть случай, когда в L имеется элемент z , линейно не зависящий от величин i, j, k . Положим (см. (59))

$$iz = a_1 + z_1; jz = a_2 + z_2; kz = a_3 + z_3. \quad (86)$$

Положим также

$$l = a(z + ai + a_2j + a_3k). \quad (87)$$

Легко проверяется, что при произвольном значении действительного числа $a \neq 0$ величина l принадлежит I и не равна нулю. Число a выберем таким образом, чтобы выполнялось условие

$$l^2 = -1. \quad (88)$$

Из соотношения (80) следует, что

$$il = -li; jl = -lj; kl = -lk. \quad (89)$$

Теперь рассмотрим величину ilj . Мы имеем

$$\begin{aligned} ilj &= i(-jl) = -kl; \\ ilj &= -lij = -lk = kl. \end{aligned} \quad (90)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что $-kl = kl$, что невозможно, так как $(kl)^2 = -1$. Итак, мы пришли к противоречию — теорема Фробениуса доказана.

Добавление о векторных пространствах

Рассмотрим множество V_3 всех векторов в трехмерном пространстве с началом в фиксированной точке O . Если в пространство ввести систему координат x_0, x_1, x_2 с началом в точке O , то любой вектор $v \in V_3$ единственным образом представляется в виде

$$v = x_0 i_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2, \quad (1)$$

где i_0, i_1, i_2 — единичные векторы осей Ox_0, Ox_1, Ox_2 , а x_0, x_1, x_2 — некоторые числа (называемые координатами вектора v). При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, то есть

$$\begin{aligned} v + v' &= (x_0 i_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2) + (x'_0 i_0 + x'_1 i_1 + x'_2 i_2) = \\ &= (x_0 + x'_0) i_0 + (x_1 + x'_1) i_1 + (x_2 + x'_2) i_2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} av &= a(x_0 i_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2) = \\ &= (ax_0) i_0 + (ax_1) i_1 + (ax_2) i_2. \end{aligned} \quad (3)$$

После того, как введены координаты, можно считать, что векторы в пространстве просто являются тройками чисел (x_0, x_1, x_2) и забыть об их геометрическом происхождении. При та-

ком подходе их изучение становится чисто алгебраическим и базируется на формулах (1) — (3).

Алгебраический подход позволяет без труда определить и векторное пространство с числом измерений большим трех. Именно, при любом $n > 1$ n -мерным (арифметическим) векторным пространством называется множество наборов $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из n вещественных чисел, в которое введены операции сложения:

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = w \end{aligned} \quad (4)$$

и умножения на число $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} av &= a(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n). \end{aligned} \quad (5)$$

При этом наборы (x_1, x_2, \dots, x_n) называются n -мерными векторами. Их можно записывать в виде $(x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n)$ или в виде $x_0 + x_1 i_1 + \dots + x_{n-1} i_{n-1}$, как это сделано в статье Л. С. Понтрягина (см. с. 2).

Основным понятием при изучении n -мерного векторного пространства является понятие линейной зависимости: набор векторов v_1, v_2, \dots, v_k называется линейно зависимым, если существуют такие числа a_1, a_2, \dots, a_k , не все равные нулю, что

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0.$$

Можно показать, что любой набор из более чем n штук векторов в n -мерном пространстве линейно зависим; кроме того, в этом пространстве можно указать набор из n штук линейно независимых векторов (такой набор называется базисом), например набор $i_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $i_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $i_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Упражнения

1. Докажите утверждения о V_3 , выделенные курсивом в начале этого Добавления.

2. Докажите, что два вектора в пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они лежат на одной прямой, а три вектора — когда они лежат в одной плоскости.

3. Докажите (геометрически, а потом чисто алгебраически), что любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

4*. Докажите, что любые $n+1$ векторов в n -мерном пространстве линейно зависимы.

5*. Покажите, что совокупность многочленов степени меньшей или равной трем образует арифметическое векторное пространство размерности четыре, базисом которого могут служить многочлены $x^3, x^2, x, 1$.

O. M.

Парадокс Вавилова

Академик АПН СССР В. А. ФАБРИКАНТ

В геометрической оптике часто и плодотворно применяется понятие о пучке параллельных световых лучей, имеющем конечное поперечное сечение. Более того, даже в теории такого волнового явления, как интерференция, во многих случаях допустимо использование этого понятия.

Во многих случаях, но далеко не во всех. В книге «Микроструктура света» замечательного советского физика С. И. Вавилова разобран весьма поучительный в этом смысле оптический парадокс.

Напомним коротко, как выглядит энергетика интерференционной картины. Интерференция, как мы знаем, есть сложение колебаний. В электромагнитных волнах колеблются значения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля. Эти величины в каждой точке пространства в каждый момент времени определяют энергию электромагнитного поля. Электромагнитная волна переносит энергию, и можно ввести понятие о плотности потока энергии. Так мы называем величину, равную количеству энергии поля, протекающей в единицу времени через единицу поверхности.

Каждая волна характеризуется еще и фазой. Если при сложении двух све-

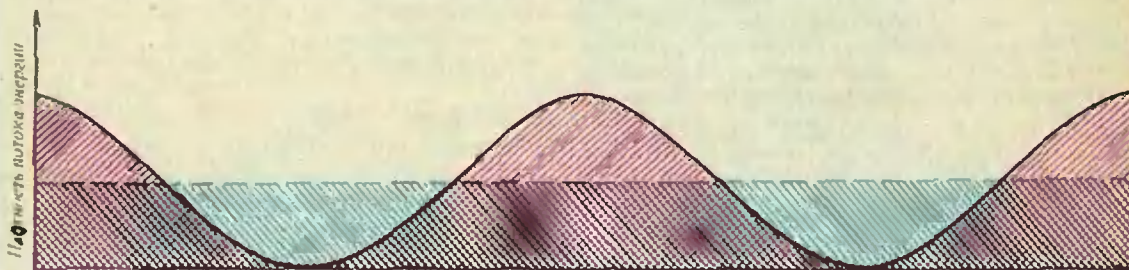
товых пучков разность их фаз остается все время одной и той же, мы говорим, что имеем дело с когерентными пучками.

В интерференционной картине, возникающей в результате сложения двух когерентных пучков, происходит пространственное перераспределение световой энергии. В светлых полосах энергия больше, чем сумма энергий складываемых пучков; в темных полосах, наоборот, — меньше. Избыток энергии в светлых полосах как раз компенсируется недостатком ее в темных. Полная энергия, распределенная по всей интерференционной картине, точно равна сумме энергий двух интерферирующих пучков.

На рисунке 1 показана зависимость плотности потока энергии в интерференционной картине от смещения по экрану, на котором она наблюдается. Картина получена при сложении двух когерентных световых пучков равной энергии. Горизонтальная пунктирная линия изображает сумму плотностей потоков энергий в складываемых пучках. Части кривой, идущие над этой прямой, соответствуют светлым интерференционным полосам, а части кривой, лежащие под пунктирной прямой, — темным. Суммарная энергия, распределенная в интерференционной картине, изображается площадью под кривой. Эта площадь точно равна площади под пунктирной прямой. Требование строгого «бухгалтера» природы — закона сохранения энергии — выполняется неукоснительно.

Перейдем теперь к парадоксу С. И. Вавилова. Представьте два совершенно одинаковых когерентных резко ограниченных световых пучка шириной a , пересекающихся под малым углом α (рисунок 2). В области $ABCD$ происходит интерференция.

Для наблюдения интерференционной картины можно установить экран, перпендикулярный плоскости черте-



Смещение по экрану

Рис. 1.

жа, проходящий через точки A и C . Интерференционная картина будет состоять из прямолинейных чередующихся светлых и темных полос, заполняющих экран от точки A до точки C (рисунок 3).

Распределение плотности потока энергии в интерференционной картине соответствует графику на рисунке 1. Если в точке D у обоих пучков одинаковые фазы световых колебаний, то разность фаз световых волн первого и второго пучков в точках, лежащих на прямой BD , будет равна нулю. Значит, прямая BD соответствует середине центральной светлой полосы. В середине соседней темной полосы разность фаз должна быть равна λ , иными словами, световые колебания в обоих пучках должны быть в противофазе. Разность фаз $\Delta\varphi$ равна разности хода ΔL обеих волн до данного места, деленной на длину волны λ и умноженной на 2π :

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda}. \quad (1)$$

Увеличению длины пути, проходящего волной, на λ соответствует запаздывание фазы на 2π . Из формулы (1) следует, что в середине ближайшей к центру интерференционной картины темной полосы ΔL должно быть равно $\lambda/2$.

Подсчитаем разность хода в точке A . Параллельный пучок можно рассматривать как поток плоских волн, перпендикулярных направлению световых лучей. Проведем через точку D (см. рисунок 2) одну из волновых поверхностей (поверхностей равной фазы) первого пучка. На этой волновой поверхности лежат точки D и A' .

Пути, проходимые обоими пучками до точки D , одинаковы. Для того чтобы попасть в точку A , волновая поверхность первого пучка, проходившая ранее через точку D , должна сместиться на отрезок $A'A$, а волновая поверхность второго пучка, проходившая ранее также через точку D , должна сместиться на отрезок DA . В результате возникает разность хода

$$\Delta L = DA - A'A = \frac{a}{\sin \alpha} - \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Ясно, что такая же разность хода, но с обратным знаком будет в точке C .

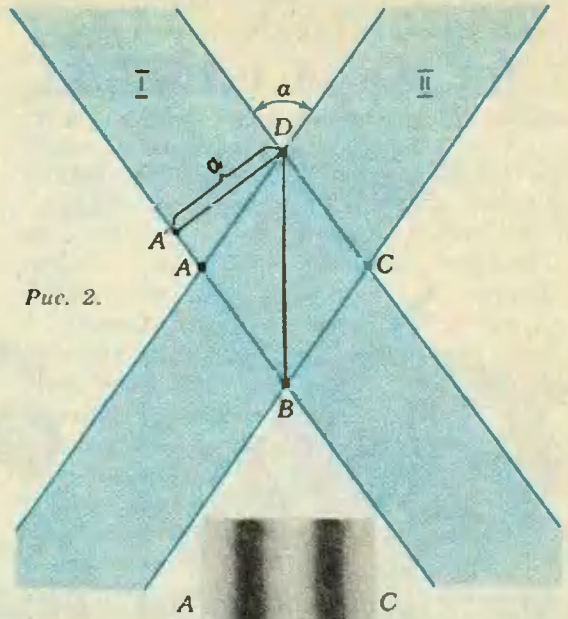


Рис. 2.

Рис. 3.

Начнем теперь уменьшать угол α . Как видно из формулы (2), при этом будет уменьшаться ΔL . При некотором малом α разность хода ΔL может стать равной $\lambda/4$. Тогда вся область AC будет заполнена одной светлой интерференционной полосой. Следовательно, всюду энергия будет превышать сумму энергий двух пересекающихся пучков. Никакой компенсации за счет образования темных полос нет, так как они вообще отсутствуют!

Можно получить и, так сказать, негативный результат, заставив пересекаться пучки с начальной разностью фаз, равной λ . Тогда область AC будет заполнена темной интерференционной полосой. В первом случае непонятно, откуда берется дополнительная энергия, во втором — неясно, куда исчезает энергия.

Оба случая явно противоречат закону сохранения энергии. Очевидно, в наших рассуждениях есть какой-то дефект, приводящий к противоречию с одним из основных законов природы. Чтобы понять, в чем здесь дело, запишем формулу (2) для случая, когда $\Delta L = \lambda/4$, и воспользуемся при этом малостью угла α ($\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ для малых α):

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{a\alpha}{2}. \quad (3)$$

(Окончание см. на с. 14)

Репортаж из мира сплавов

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ



Без преувеличения можно сказать, что наша жизнь проходит в мире металла. Из него сделано большое количество окружающих нас повседневно предметов. Но чистых металлов практически не бывает. Когда о каком-нибудь предмете говорят «металлический», то всегда подразумевается, что это — сплав двух или нескольких металлов.

Как «устроены» сплавы? Как в них располагаются атомы тех элементов, из которых они состоят? Ответы на эти вопросы интересуют и физиков, и металлургов, и людей многих других специальностей, так как именно структура сплавов в первую очередь определяет их свойства, такие как прочность, электропроводность и т. п.

1. Чистые металлы и сплавы

Возьмем чистую медь. При нормальных условиях она представляет собой вещество с кристаллическим строением. «Кирпичики», из которых построен кристалл, можно изобразить так, как на рисунке 1. Это — так называемая элементарная ячейка меди. Она называется гранецентрированной кубической (ГЦК) ячейкой, так как атомы расположены и в вершинах куба, и в центрах его граней. Размеры куба весьма малы — длина его ребра $a=3,6 \cdot 10^{-10}$ м. Если периодически «продолжить» такие элементарные кубики во всех трех измерениях, то мы получим кристаллическую ГЦК решетку меди.

Будем теперь добавлять в медный кристалл атомы другого элемента, например золота. Разумеется, нельзя добавлять атомы по одному. Зато можно взять определенные количества золота и меди, вместе их расплавить и дать жидкости остыть и за-

кристаллизоваться. Если посмотреть на элементарную ячейку кристалла теперь, то окажется, что она по-прежнему гранецентрированная кубическая, а часть позиций меди занята атомами золота. (рисунок 2). Такие сплавы называют сплавами замещения, поскольку атомы одного элемента просто замещают атомы другого. Это, пожалуй, самая распространенная группа сплавов.

Можно изменять относительные количества сплавляемых золота и меди. Тогда детали микроскопической картинки будут изменяться, но в целом, или, как говорят физики, качественно, она будет оставаться одной и той же — та же ГЦК решетка, по узлам (позициям) которой распределены атомы золота и меди. Это распределение может быть и хаотическим, и каким-либо упорядоченным — например, в вершинах куба будут находиться атомы одного сорта, а в центрах граней — другого. Так как же именно будут «расселяться» атомы разных сортов в кристаллической решетке? От чего зависит способ их распределения по позициям?

Конечно, можно всякий раз для ответа на эти вопросы ставить эксперимент, который позволил бы наблюдать воочию «сцены из жизни атомов». Такая возможность у нас имеется. Просвечивая образец интересующего нас сплава рентгеновскими лучами, мы получим дифракционную картину, по которой можно восстановить характер взаимного расположения атомов различных сортов в решетке. К примеру, если при комнатной температуре посмотреть «глазами рентгеновских лучей» на сплав, состоящий на 75 % из атомов меди и на оставшиеся 25 % — из атомов золота, то мы увидим почти совершенную картинку, о которой уже вскользь упоминалось, — почти

все вершины кубов заняты атомами золота, а почти все центры граней — атомами меди (рисунок 3). Мы говорим «почти все» потому, что нет-нет да и мелькнет какой-нибудь шальной атом меди в вершине куба, или окажется забывчивый атом золота на медной позиции, но это очень редкий случай. В основном же картина просто поражает своей правильностью: в вершине куба — золото, в центре грани — медь. Про такие сплавы говорят, что они — упорядоченные. Какие силы заставляют атомы в сплавах упорядочиваться? Всегда ли это бывает? Какие еще могут быть упорядоченные структуры? Опять целая серия вопросов; вопросов, которые ставит перед исследователем сама природа. Сплавы всех элементов при разных концентрациях компонентов и при разных температурах под рентгеновскими лучами не пересмотришь, и поэтому стоит попытаться выработать некоторые общие способы прогнозировать «расселение» атомов в сплавах. А для этого надо прежде всего понять основные законы «общегития» атомов.

Атомы в кристалле всегда «под присмотром». У них есть две могущественные начальницы, которые не в ладах друг с другом. Попадешь в милость к одной — жди неприятностей от другой. Имя одной начальницы нам хорошо известно: это — энергия. Вторая же пока предстает перед нами инкогнито, и мы до поры до времени будем величать ее Королевой беспорядка.

2. Энергия

Для начала нам надо ввести количественные меры взаимодействия атомов в веществе. Во-первых, будем счи-

Рис. 1. Элементарная ячейка меди. Стрелками показаны некоторые пары ближайших соседей.

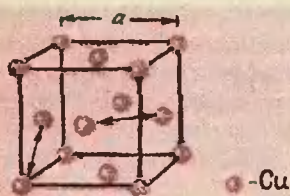
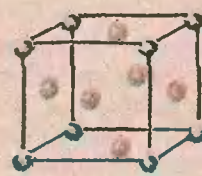


Рис. 2. Неупорядоченный сплав замещения медь — золото.



Рис. 3. Упорядоченный сплав замещения медь — золото (структура типа Cu_3Au : на каждую ячейку приходится по $\frac{1}{8} \cdot 8 = 1$ атому золота и по $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ атома меди).



тать, что все атомы взаимодействуют между собой попарно. Парные силы нам хорошо известны. К ним относятся и силы Кулона, которые действуют между зарядами, и силы взаимного тяготения тел. Характерная особенность этих сил — убывание с расстоянием. Тела взаимодействуют тем слабее, чем больше расстояние между ними. Так, энергия кулоновского взаимодействия зарядов убывает обратно пропорционально расстоянию между ними.

В кристалле, состоящем из атомов металла, энергия взаимодействия между атомами убывает намного быстрее. Поэтому логично второе предположение: основное значение будут иметь взаимодействия между ближайшими соседями в решетке.

Вернемся теперь снова к рисунку 1. На нем указаны некоторые пары ближайших соседей в ГЦК решетке. Из теоремы Пифагора легко вычислить расстояние между ближайшими соседями: оно равно $a\sqrt{2}/2$ (напомним, что a — длина ребра элементарного кубика). Каждый атом в ГЦК решетке имеет по 12 ближайших соседей (попробуйте показать это сами). Число ближайших соседей, которое обычно называется координационным числом, обозначается буквой Z .

Итак, каждый атом в решетке взаимодействует со своими ближайшими соседями. Но, естественно, атомы разных сортов взаимодействуют между собой по-разному. Поскольку в решетке находятся атомы двух сортов A и B , то их взаимодействие описывается тремя значениями энергий, которые мы обозначим так: v_{AA} , v_{BB} — энергии взаимодействия соседних атомов одного сорта (A или B), v_{AB} — энергия взаимодействия двух атомов-соседей сортов A и B . Теперь через эти параметры легко записать энергию любой конфигурации атомов в решетке. Она будет складываться из суммы энергий взаимодействия всех пар ближайших соседей — типа AA , AB , BB :

$$E = P_{AA} v_{AA} + P_{BB} v_{BB} + P_{AB} v_{AB},$$

где P_{AA} , P_{BB} , P_{AB} — числа соответствующих пар соседей.

Пусть в рассматриваемом нами кристалле всего N атомов, из которых n_A атомов типа A и n_B атомов типа B (то есть $N = n_A + n_B$). Через эти величины, в частности, выражаются кон-

центрации компонентов в сплаве:

$$c_A = \frac{n_A}{N}, \quad c_B = \frac{n_B}{N} = 1 - c_A.$$

Теперь у нас имеется все необходимое для оценки различных вкладов в энергию. Заметим, что существуют соотношения между числами P_{AA} , P_{BB} и P_{AB} . Каждый атом сорта A может иметь всего Z ближайших соседей. Соответственно общее число ближайших соседей у всех атомов A равно $n_A Z$. Из них P_{AB} позиций приходится на долю атомов сорта B . Если же ближайшим соседом атома сорта A является другой атом того же сорта, то это соседство использует сразу две из $n_A Z$ позиций, так как для второго атома первый будет в свою очередь являться ближайшим соседом. Так что для атомов сорта A должно выполняться соотношение

$$n_A Z = 2P_{AA} + P_{AB},$$

а для атомов сорта B , аналогично, —

$$n_B Z = 2P_{BB} + P_{AB}.$$

Теперь из этих равенств выразим величины P_{AA} и P_{BB} через P_{AB} и подставим их в выражение для энергии:

$$E = \frac{n_A Z - P_{AB}}{2} v_{AA} + \frac{n_B Z - P_{AB}}{2} v_{BB} + P_{AB} v_{AB} = P_{AB} \left(v_{AB} - \frac{v_{AA} + v_{BB}}{2} \right) + \left(\frac{n_A Z}{2} v_{AA} + \frac{n_B Z}{2} v_{BB} \right).$$

Итак, энергию взаимодействия атомов в кристалле сплава мы представили в виде суммы двух слагаемых. Видно, что второе слагаемое зависит только от чисел атомов сортов A и B , но совершенно не зависит от их взаимного расположения. Первое же слагаемое, наоборот, явно зависит от расположения атомов, поскольку перераспределение атомов в решетке очень сильно сказывается на числе P_{AB} . Например, представим себе кристалл, в одной части которого сосредоточены все атомы A , а в другой — все атомы B , как это схематически показано на рисунке 4. В таком кристалле число P_{AB} будет минимальным, так как соседство разноименных атомов осуществляется только в узкой зоне вблизи границы обеих частей кристалла. Естественно, что при «перемешивании» атомов это число сильно возрастет.

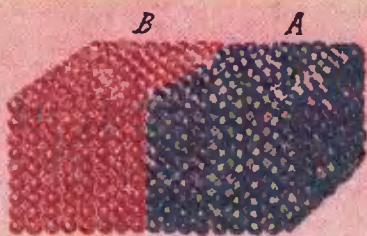


Рис. 4. Структура распадающегося сплава А—В.

Суммируя наши рассуждения, запишем энергию E в таком виде:

$$E = P_{AB} v + E_0.$$

В этом равенстве мы обозначили через E_0 второе слагаемое, которое будет постоянным при любом взаимном расположении атомов А и В, и заменили величиной v выражение

$$v_{AB} = \frac{v_{AA} + v_{BB}}{2},$$

что для нас существенны не абсолютные значения величин v_{AA} , v_{AB} и v_{BB} , а только определенная их комбинация v , которую обычно называют энергией смешения.

Опыт повседневной жизни подсказывает, что предоставленная самой себе система стремится занять такое положение, в котором ее энергия будет возможно наименьшей. Именно поэтому поднятый вверх, а затем отпущенный камень вновь падает на землю, растянутая пружина вновь сжимается и т. д. Посмотрим, как с этой точки зрения может «управлять» расселением атомов в кристаллической решетке энергия смешения. Значение v может быть как положительным, так и отрицательным (в первом случае средняя энергия взаимодействия одноименных атомов больше энергии взаимодействия атомов разных сортов, во втором — наоборот).

Если $v > 0$, то энергия E тем меньше, чем меньше величина P_{AB} , — в этом случае структура сплава должна быть примерно такой, как на рисунке 4. Про такой сплав говорят, что он распадающийся — он как бы стремится вновь распасться на чистые компоненты, из которых был образован. По существу кристалл на рисунке 4 как раз и состоит из этих чистых компонентов: правая часть — только из А, а левая — только из В.

Если же $v < 0$, то для достижения

минимума энергии число P_{AB} , наоборот, должно быть как можно большим. Как раз такому состоянию и соответствует упорядоченный сплав.

Например, при относительных концентрациях $c_A = 0,25$ и $c_B = 0,75$ оптимальной будет такая конфигурация, как на рисунке 3. Строго доказать этот факт не так просто, хотя интуитивно он довольно очевиден: попробуйте поменять местами пару атомов А и В и увидите, что число P_{AB} уменьшится.

Мы объяснили, почему одни сплавы — упорядоченные, а другие — распадающиеся. Все определяется знаком энергии смешения. Но почему же тогда бывают неупорядоченные сплавы? Для объяснения этого факта нам придется вспомнить и о другой грозной начальнице из мира атомов.

3. Королева беспорядка

Эта грозная незнакомка, названная нами пока Королевой беспорядка, для атомов значит не меньше, чем энергия. Она проявляет себя в полной мере в очень больших системах, состоящих из колоссального числа частиц. Одной из таких систем как раз и является интересующий нас кристалл сплава замещения. Какую же роль играет в жизни атомов Королева беспорядка? Мы попытаемся объяснить это на качественном уровне, без математических выкладок.

Проверим на опыте, управляет ли что-либо поведением системы большого количества тел в отсутствие энергетического фактора, то есть когда взаимным влиянием тел можно пренебречь. Для этого возьмем много красных и синих шаров и будем многократно бросать их на бильярдное поле. Энергетический фактор в таком эксперименте будет проявлять себя только при столкновении шаров друг с другом, поскольку при отсутствии касания шары, по существу, не взаимодействуют. Естественно, на конечное положение шаров он практически влиять не будет.

Итак, что же мы увидим, бросив шары на сукно бильярда? Они хаотично распределятся по полю. Повторим опыт. Опять та же хаотическая картина. Никакого порядка в расположении шаров не видно. Очень маловероятно, что при каком-то бросании

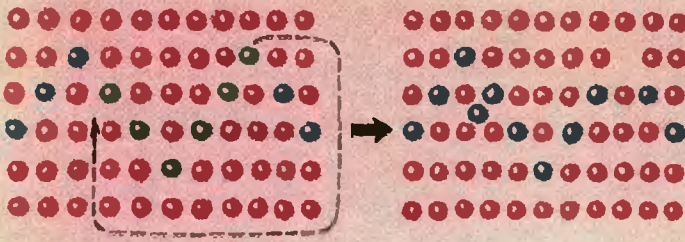


Рис. 5. Перемещение одного шара разрушает узор.

шары разных цветов соберутся в разных концах бильярдного поля. Еще менее вероятно, что красные и синие шары «изобразят» какой-нибудь сложный правильный узор. Это представляется нам очевидным и без эксперимента.

Но с другой стороны... Мы бросаем шары случайным (беспорядочным) образом, и их расположение на сукне также совершенно случайно. Казалось бы, шарам все равно как расположиться — хаотически или в виде правильного узора. Почему же все-таки они располагаются хаотически?

Прделаем такой эксперимент. Сложим из шаров какой-нибудь узор, например такой, как на рисунке 5. А теперь вынем из узора один шар и поместим его в любое другое место — узор наверняка нарушится. Прделаем тот же опыт при хаотическом расположении шаров — при перенесении одного шара в другое место картина по-прежнему будет хаотической. Чтобы из хаоса создать узор, нам необходимо согласованным образом передвинуть большое количество шаров. Схематически эти закономерности можно изобразить так:

УЗОР $\xrightarrow{\text{перенесение шаров}}$ ХАОС

ХАОС $\xrightarrow{\text{перенесение шаров}}$ ХАОС.

Иначе говоря — все пути ведут в хаос.

Перенос шар с одного места на другое, мы тем самым, по существу, «выкидываем» новую конфигурацию шаров. Но хаос многолик, и в каждой конфигурации он обращен к нам лишь одним из своих бесчисленных ликов. Новая конфигурация — новый лик все того же хаоса.

Отсюда можно понять, что хотя все конфигурации шаров имеют равные «права на существование», но число конфигураций, соответствующих узору, значительно уступает числу кон-

фигураций, соответствующих хаосу. Иными словами, при каждом бросании хаотическое расположение шаров на сукне более вероятно, чем упорядоченное, в виде какого-нибудь узора.

Из всего сказанного мы можем сделать вывод: помимо энергетического, существует другой фактор, управляющий поведением шаров. Благодаря его влиянию при каждом бросании осуществляется наиболее вероятная картина распределения шаров по бильярдному полю — хаотическая.

А теперь вернемся к нашим сплавам. Несмотря на некоторую условность понятий «узор» и «хаос», аналогия между шарами разных цветов на бильярдном поле и атомами разных сортов в кристаллической решетке довольно наглядна. В случае сплава замещения бильярдному узору соответствует упорядоченный сплав, хаотическому расположению шаров — разупорядоченный. И теперь нам понятно, какую роль играет в жизни атомов вторая правительница, которую мы называли Королевой беспорядка, — она стремится внести хаос в расположение атомов в решетке кристалла. А подлинное имя этой правительницы — энтропия.

4. Порядок и беспорядок в сплавах

Подведем некоторые итоги. Нам известно, что энергетический фактор стремится упорядочить расположение атомов в узлах кристаллической решетки. Это приводит либо к образованию упорядоченных структур, либо к распаду сплава на чистые элементы. С другой стороны, энтропийный фактор стремится разупорядочить систему, создать какое-то хаотическое расположение атомов. Борьбой этих двух тенденций и определяются те законы «общегития» атомов, о которых гово-

рилось вначале. Какая из тенденций будет преобладать: энергетическая или энтропийная? Кто решает тяжбу двух начальственных дам — Энергии и Энтропии? Судьей оказывается хорошо известная нам величина — температура! И судьей не беспристрастным. Температура выступает союзницей сил беспорядка, сил, которые на нашем «биллиардном» языке стремятся превратить строгий узор в хаос.

Ничего особенно удивительного в этом нет. Мы знаем на примере газов, что с ростом температуры движение молекул становится все более и более интенсивным. То же самое происходит и в других веществах. При определенной температуре это тепловое движение оказывается способным разорвать «энергетические пути» и тем самым разупорядочить систему.

Примеров таких превращений много. Один из них — плавление. Вспомним, что происходит при нагревании с твердым телом, представляющим собой правильный кристалл, то есть тот самый узор, о котором мы уже не раз говорили. С ростом температуры все сильнее становится стремление ионов вырваться из кристаллической решетки, и наконец им это удается — выше температуры плавления из правильного кристалла образуется жидкость — узор переходит в хаос.

Таким образом, при достаточно высоких температурах определяющим оказывается энтропийный фактор. Соответственно при более низких температурах главную роль играет энергетический фактор. Что значит «достаточно высокие» и «более низкие» температуры — решается в каждом конкретном случае по-своему. Главное, что надо понять и запомнить: температура регулирует относительную важность энергетического и энтропийного факторов.

Вернемся, и теперь уже окончательно, к миру сплавов. При высоких температурах распределение атомов будет в основном определяться энтропийным фактором — и сплав будет разупорядоченным. Однако по мере понижения температуры энергетический фактор будет играть все большую и большую роль, пока, наконец, при некоторой температуре не станет важнее энтропийного. Такая температура носит название критической. При критической температуре сплав становится упорядоченным и будет оставаться таким при дальнейшем охлаждении.

Вся информация о порядке и беспорядке в сплавах обычно заключается в специальные схемы, которые носят название диаграмм состояния. На рисунке 6 приведена в несколько упрощенном виде такая диаграмма для сплавов меди с золотом, с которых мы начали этот рассказ. По оси ординат отложена температура, а по оси абсцисс — относительная концентрация компонентов. Любая точка на диаграмме соответствует определенным значениям концентраций и температуры. Точки, лежащие на кривых линиях, указывают значения критических температур для разных концентраций компонентов. Над линиями расположена область неупорядоченного состояния сплавов, под линиями — область упорядоченных сплавов. Упорядоченные состояния под двумя крайними кривыми имеют уже известные нам структуры типа изображенной на рисунке 3: слева — сплав с относительными концентрациями $c_{Cu}=75\%$ и $c_{Au}=25\%$, а справа — сплав с $c_{Cu}=25\%$, $c_{Au}=75\%$. Позиции, занимаемые в кристаллической решетке первого сплава атомами меди, во втором сплаве занимают атомы золота и наоборот. А под кривой

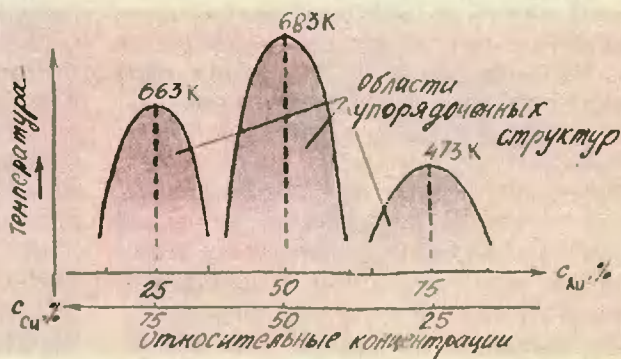


Рис. 6. Упрощенное изображение части диаграммы состояния сплавов меди с золотом. При низких температурах точный вид диаграммы неизвестен.

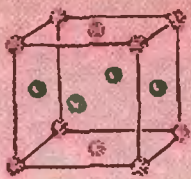


Рис. 7. Упорядоченный сплав замещения медь — золота (структура типа CuAu).

в центре диаграммы — область существования упорядоченного сплава, элементарная ячейка которого изображена на рисунке 7: в кристаллической решетке такого сплава атомы меди и золота чередуются послойно — слой меди, слой золота и т. д.

Теперь металловед при разработке сплава из данных материалов не должен действовать вслепую. Ему достаточно посмотреть на диаграмму, и сразу станет ясным, какую структуру будет иметь сплав данной концентрации при данной температуре. И поскольку, как мы уже говорили, структура сплава во многом определяет его свойства (сопротивление, прочность и т. д.), подобные диаграммы позволяют до некоторой степени эти свойства прогнозировать.

Парадокс Вавилова

(Начало см. на с. 6)

Покажем, что для выполнения условия $\Delta L = \lambda/4$ угол α действительно должен быть очень мал.

Как видно из (3),

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{a}. \quad (4)$$

Возьмем $a = 1$ см, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см; тогда $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-5}$ радиан.

Итак, неприятности с законом сохранения энергии возникают при угле между пучками порядка отношения длины волны к ширине пучка.

Решение парадокса заключается в том, что при таких малых углах уже нельзя пользоваться понятием идеального параллельного пучка конечного сечения.

При любой попытке реализовать такие пучки мы потерпим неудачу. Благодаря явлению дифракции ограничение размеров пучка с необходимостью приводит к превращению его в расходящийся пучок. Угол φ рас-

5. Заключение

Теперь дадим волю нашему воображению. Нам нужен сплав с определенными прочностью, пластичностью, электропроводностью? Ничего не может быть проще. Вкладываем в компьютер все требования, и машина выдает точный рецепт сплава.

Очень хочется, чтобы все было именно так. Но пока до этого далеко. Сегодня мы еще учимся рассчитывать состояние твердого вещества, и задача об упорядочивающемся сплаве — только скромный этап долгого пути.

Этой задаче уже 65 лет. В ее разработке принимали участие советские физики академики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, американские ученые Х. Бете и Л. Онсагер, английский физик Р. Пайерлс. Но белых пятен еще много: как рассчитать величину энергии смешения? как учесть дальнейшее взаимодействие атомов, то есть выйти за пределы приближения ближайших соседей? как обобщить развитые методы на сплавы трех и более компонентов? Эти и многие другие вопросы до сих пор ждут своего решения.

хождение пучка определяется как раз формулой (4). Естественно, угол α , под которым пересекаются пучки, можно определить лишь с точностью до величины порядка угла φ . Пока $\alpha \gg \varphi$, расхождением пересекающихся пучков можно пренебречь. Но когда α становится сравнимым по порядку величины с φ , понятие ограниченного параллельного пучка теряет смысл.

Если бы дифракция еще не была открыта, мы на основании закона сохранения энергии и формулы (4) должны были бы не только догадаться о ее существовании, но и указать на основную закономерность, управляющую величиной дифракционного угла (угла расхождения). Это хороший пример того, что закон сохранения в физике всегда может служить надежной путеводной звездой.

Взяв реальные световые пучки, мы никогда, конечно, не получим противоречия с законом сохранения энергии. В интерференционных опытах данного типа всегда дело будет сводиться к пространственному перераспределению потока энергии.



Пинг-понг... в умывальнике

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

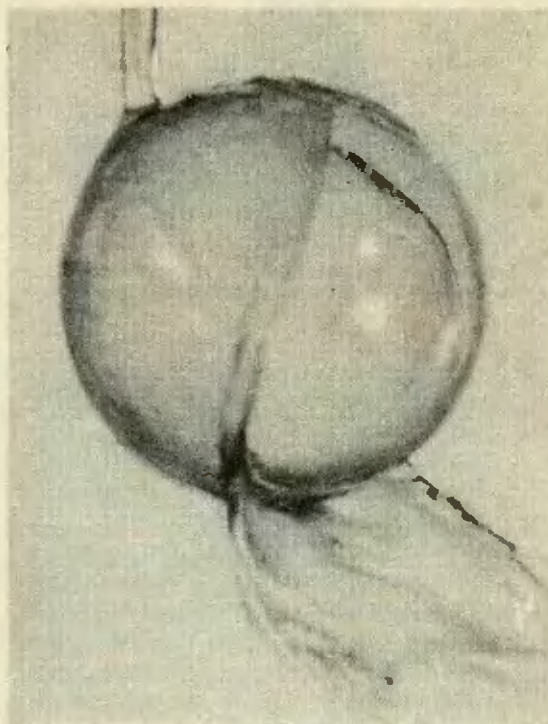
Опыты, о которых пойдет речь, доступны всем и не требуют никакого специального оборудования. Вам понадобятся только шарик для настольного тенниса (пинг-понга), стандартная раковина для умывания (или ванна), миллиметровая линейка, трехлитровая банка и часы с секундной стрелкой.

Опыт 1. Закройте сливное отверстие раковины (ванны) и наполните ее водой до уровня 3 — 5 см. Подставьте пинг-понговый шарик под струю там, где она прорезает поверхность воды, и отпустите его. Интуитивно кажется, что струя должна отбросить шарик в сторону. Но это не так! Наоборот, струя захватывает шарик, и он остается в месте ее падения.

Присмотритесь внимательнее. Оказывается, шарик не неподвижен — под действием струи он совершает небольшие колебания. Сложите ладони лодочкой и подведите их под шарик так, чтобы он продолжал плавать под струей, не касаясь рук. Теперь поднимайте шарик вдоль струи. Вы заметите, что частота колебаний при подъеме шарика уменьшается.

Опыт 2. Откройте сливное отверстие. В стандартной раковине (ванне) оно представляет собой ямку цилиндрической формы с решетчатым дном глубиной около 20 мм и диаметром около 40 мм. Шарик для пинг-понга немного меньше — его диаметр равен 37 мм, так что шарик свободно помещается в сливном отверстии, и еще остается зазор в 1 — 2 мм (рис. 1).

Поднесите шарик под водой к сливному отверстию и отпустите. Поток воды втянет его в отверстие, несмотря на то, что шарик в воде не тонет. Но что это? Вы слышите низкий



гудящий звук, очевидно, вызванный колебаниями шарика. Первая мысль, которая приходит в голову, — что шарик подпрыгивает на решетке. Однако дело не в этом. Прикоснитесь сверху к шарiku пальцем, и вы убедитесь, что он колеблется не вертикально, а горизонтально — насколько позволяет ему величина зазора.

Более того. Посмотрите на фабричное клеймо на шарике, и вы увидите, что шарик еще и вращается, причем достаточно медленно, так что это можно заметить глазом. Иногда вращение происходит только в одну сторону, а иногда направление вращения шарика время от времени произвольно изменяется.

Как же объяснить эти опыты? Сразу скажем, что оба они служат яркой иллюстрацией закона Бернулли — од-

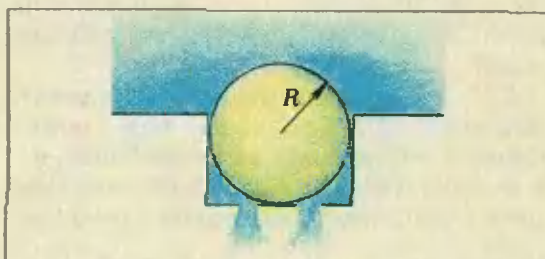


Рис. 1.

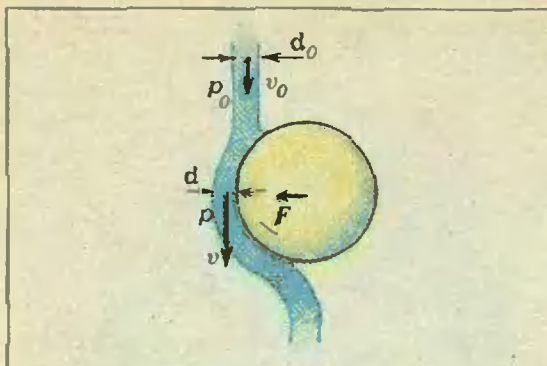


Рис. 2.

ного из первых законов гидродинамики. Качественно его можно сформулировать так («Физика 8», § 65): в движущейся жидкости давление больше в тех сечениях, где меньше скорость движения, и наоборот, там, где скорость больше, давление меньше. Другими словами, при увеличении скорости движения жидкости давление в ней падает. Это уменьшение давления и приводит к тому, что в обоих опытах поток воды как бы втягивает пластмассовый шарик внутрь себя.

Закон Бернулли поможет объяснить и колебания шарика в струе и в отверстии раковины. Но прежде давайте оценим скорость воды в струе из водопроводного крана.

Нетрудно подобрать такой приток воды в раковину (или ванну), при котором уровень воды в ней почти не изменяется. С помощью трехлитровой банки и секундомера можно измерить соответствующий расход жидкости (то есть массу жидкости, расходуемой в единицу времени). Он окажется равным примерно (80 — 100) г/с. Теперь линейкой измерим диаметр струи вблизи поверхности воды в раковине. Он близок к 6 мм. Этому соответствует скорость струи около 3 м/с (проверьте это). Конечно, скорость течения можно сделать и большей и меньшей полученного значения, но в дальнейших оценках давайте считать ее именно такой.

Для более детального обсуждения наблюдаемых эффектов нам понадобится не только качественная, но и количественная формулировка закона Бернулли*). Согласно этому за-

кону, в любом сечении струи жидкости остается постоянной сумма

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gh,$$

где ρ — плотность, v — скорость, p — давление жидкости, h — высота выбранного сечения.

Объяснение опыта 1. Давайте временно упростим себе задачу: рассмотрим не взаимодействие шарика с цилиндрической струей, а воздействие плоской струи на цилиндр. Существо физического явления от этого не изменится, а рассуждать нам будет проще.

Сначала обсудим случай, когда цилиндр лишь слегка касается струи, и оценим действующую на него силу (рис. 2). Согласно закону Бернулли, внутри изгибающейся струи давление падает на величину

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} (v^2 - v_0^2)$$

(слабым $\rho g R$ можно пренебречь, поскольку в нашем случае величина $gR \approx 0,2 \text{ м}^2/\text{с}^2$ заметно меньше, чем $v^2/2 \approx 4,5 \text{ м}^2/\text{с}^2$). Траектория частиц жидкости, огибающих цилиндр, — дуга окружности, поэтому они движутся с центростремительным ускорением. Это ускорение обусловлено разностью атмосферного давления p_0 (оно же есть давление воды в прямой струе) и давления p в изогнутой струе:

$$m \frac{v^2}{R} = (p_0 - p)S, \text{ или } \frac{v^2}{R} = \frac{p_0 - p}{\rho d},$$

где S — площадь соприкосновения струи с цилиндром. Для струи, толщина которой d много меньше радиуса цилиндра R , скорость обтекания лишь немного больше начальной скорости v_0 . Поэтому сила, отклоняющая струю, равна

$$F = (p_0 - p)S = \frac{\rho v^2 d}{R} S.$$

Такая же по модулю, но противоположно направленная сила действует на цилиндр.

Этот результат, полученный для обтекания цилиндра, остается справедливым и для обтекания шарика, возможно, с другим численным коэффициентом. Площадь соприкосновения струи с шариком практически всегда порядка квадрата его радиуса R . Поэтому сила, втягивающая шарик

*) Об этом можно прочитать в заметке «Закон Бернулли» («Квант» 1984, № 5, с. 33). (Примеч. ред.)

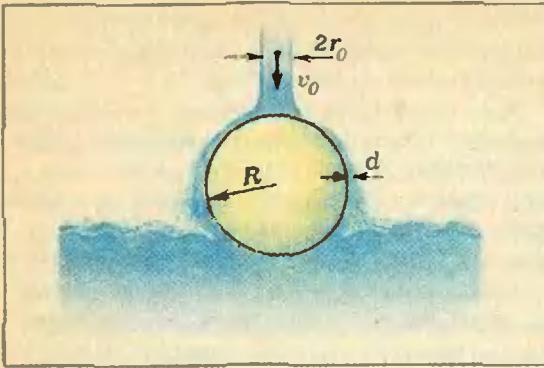


Рис. 3.

в струю при их касании, по порядку величины равна

$$F \sim \rho v_0^2 R d.$$

Рассмотрим теперь центральное обтекание шарика, когда струя падает точно на его вершину (рис. 3). В этом случае вода обтекает шарик симметрично, и поэтому $F=0$. Для центрального обтекания нетрудно найти толщину слоя d . Из условия постоянства потока следует, что

$$d \sim \frac{r_0^2}{R}$$

(покажите это самостоятельно).

Наконец, для промежуточного случая, когда смещение x шарика от оси симметрии струи невелико по сравнению с его радиусом R (рис. 4), оказывается, что сила F линейно зависит от x и направлена так, чтобы вернуть шарик в положение равновесия:

$$F \sim -\rho v_0^2 d \cdot x \sim \frac{\rho v_0^2 r_0^2}{R} x.$$

(К сожалению, точное значение силы F для этого случая получить трудно.)

Под действием этой силы шарик и будет совершать колебания. Выражение для частоты колебаний можно написать по аналогии с колебаниями грузика на пружине:

$$P_{\text{пр}} = -kx \Rightarrow \omega_{\text{сп}} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$F_{\text{ш}} \sim -\frac{\rho v_0^2}{R} x \Rightarrow \omega_{\text{ш}} \sim v_0 r_0 \sqrt{\frac{\rho}{RM}}.$$

При массе шарика $M \approx 3$ г получаем

$$\omega_{\text{ш}} \sim 40 \text{ с}^{-1}, \text{ и } \nu_{\text{ш}} \sim 6 \text{ Гц}.$$

При подъеме шарика в ладонях

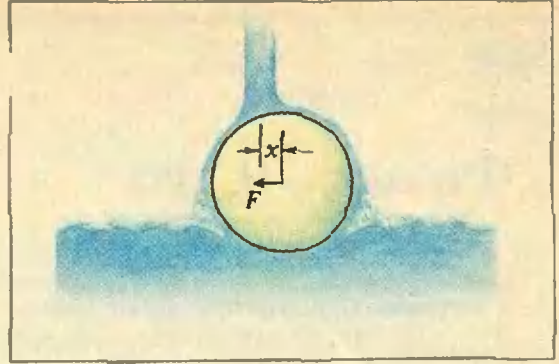


Рис. 4.

вверх по струе одновременно изменяются и r_0 , и v_0 , но остается постоянным произведение $v_0 r_0^2$. Поскольку r_0 растет, произведение $v_0 r_0$ падает. Следовательно, по мере подъема к источнику частота колебаний шарика должна уменьшаться, что и наблюдается на опыте.

При уменьшении частоты колебаний можно заметить, что шарик еще и поворачивается в разные стороны. В тонких медленных струях колебание и вращение шарика объединяются в сложное красивое движение вокруг струи. Убедитесь в этом сами на опыте.

Объяснение опыта 2. Пусть начальное положение шарика такое, как изображено на рисунке 5 (вид сверху). Оценим скорость течения в зазоре сливного отверстия. Площадь зазора не зависит от положения шарика и равна $\pi(R_{\text{отв}}^2 - R^2) \approx 1 \text{ см}^2$, поэтому средняя скорость течения вокруг шарика составляет $v \approx 1$ м/с. Эта скорость, однако, отнюдь не постоянна по сечению зазора: в его широкой части она существенно больше, чем в сужающейся щели (вблизи точки касания A), где течение тормозится трением о стенки. Согласно закону Бернулли давление в движущейся жидкости больше там, где меньше скорость. Поэтому появляется сила, направленная к широкой части зазора,

(Окончание см. на с. 48)

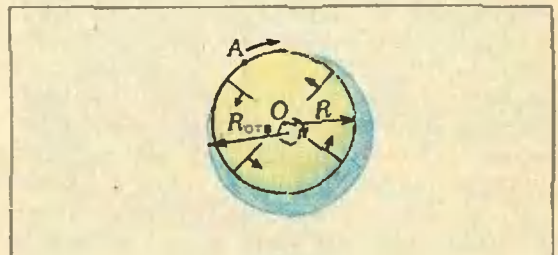


Рис. 5.



Физика 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Открытие электрона» предназначена девятиклассникам, «Как увидеть невидимое?» — десятиклассникам.

Материалы подготовил Н. К. Белкин.

Открытие электрона

Слово «электрон» — название одной из заряженных элементарных частиц — и производные от него, пожалуй, чаще всего встречаются в наши дни в научно-технической литературе. Сравнительно недавно появилось слово «электроника», обозначающее, с одной стороны, науку о взаимодействиях электронов с электромагнитными полями, а с другой — новую область техники. Такие прилагательные, как «электронный», «электронная» и т. д., широко вошли в наш язык и в нашу жизнь. Достаточно напомнить, например, о существовании различных электронных приборов и электронных вычислительных машин.

Когда, кем и как был открыт электрон? Когда, кто и как определил его основные свойства и выяснил его роль в природе?

Лучи или частицы? Открытие электрона представляет собой завершение длившегося несколько десятилетий исследования газового разряда, то есть процесса прохождения электрического тока через газ («Физика 9», § 70—72). В частности, приблизительно к середине прошлого века было выяснено, что если к электродам, впаянным в стеклянную трубку с газом, приложить достаточно высокое напряжение, то через газ проходит электрический ток, а сам газ при этом светится. Характер свечения зависит от давления газа и приложенного напряжения, а цвет света определяется природой газа. Однако при достаточно малом давлении (около одного паскаля, то есть стотысячной доли атмосферы) свечение газа почти исчезает (хотя ток продолжает идти), но зато

начинает светиться зеленоватым светом стекло трубки.

Что же происходит в разрядной трубке после исчезновения свечения газа? По этому поводу возник длительный спор между физиками, наиболее активно изучавшими это явление.

Немецкие физики (Г. Герц, Э. Гольдштейн) считали, что из катода трубки исходят особые лучи, которые и вызывают свечение стекла. Их поэтому стали называть *катодными лучами*. Герц, открывший электромагнитные волны, естественно, склонен был считать, что катодные лучи — это особые электромагнитные волны, похожие на свет, но свет невидимый.

Английские физики (У. Крукс, А. Шустер, затем Дж. Дж. Томсон) полагали, что из катода выходят не лучи, а какие-то отрицательно заряженные частицы и что именно под их воздействием возникает свечение стекла. Крукс, например, утверждал, что это газовые молекулы, которые, удаляясь от катода, приобретают отрицательный заряд и затем ускоряются силой притяжения к аноду. В пользу этого говорило то, что катодные лучи отклоняются магнитным полем. Об этом важном факте знали, конечно, и немецкие физики, но в то время еще не было твердо установлено, что электромагнитные волны с магнитным полем не взаимодействуют.

Обеими спорящими сторонами было твердо установлено, что свойства катодных лучей не зависят от того, из какого материала сделан катод. Спор этот был весьма плодотворным, так как каждая группа ученых старалась придумать и поставить такие опыты, которые доказали бы их правоту.

Решающие опыты были выполнены в 1897 году английским физиком Джозефом Джоном Томсоном. Опыты эти состояли в наблюдении движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях.

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. В прошлом номере в заметке «О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы» было показано, что скорость v и ускорение a заряженной частицы в электрическом поле определяются удельным зарядом частицы q/m (q — заряд частицы, m — ее масса):

$$v = \sqrt{2 \frac{q}{m} U}, \quad a = \frac{q}{m} E,$$

где U — напряжение, а E — напряженность поля.

Но оказывается, движение частицы в магнитном поле тоже определяется ее удельным зарядом. Покажем это.

На частицу с зарядом q (для простоты будем считать его положительным), движущуюся с начальной скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} , действует сила Лоренца F_{\perp} («Физика 9», § 89). Если вектор \vec{v} перпендикулярен вектору \vec{B} , то сила Лоренца по модулю равна qvB и направлена перпендикулярно вектору скорости и вектору магнитной индукции. Поскольку сила перпендикулярна скорости частицы, она заставляет частицу двигаться по окружности, сообщая ей центростремительное ускорение. Второй закон Ньютона для этого случая имеет вид

$$m \frac{v^2}{r} = qvB,$$

откуда для радиуса r окружности получаем

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{B(q/m)}.$$

Таким образом, при заданном значении магнитной индукции и начальной скорости частицы радиус кривизны ее траектории действительно определяется удельным зарядом частицы (q/m).

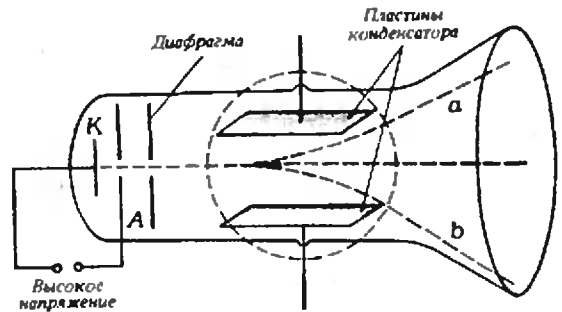
Из последнего равенства можно получить формулу для определения самого удельного заряда:

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{Br}.$$

Радиус окружности r и индукцию B измерить нетрудно. Но нужно еще знать скорость v частицы, которую измерить не так просто. Томсон сумел обойти эту трудность. И вот каким способом.

Опыты Дж. Дж. Томсона. Целью опытов Томсона было определение удельного заряда тех предполагаемых частиц, которые, по мнению английских физиков, образуют катодные лучи. Прибор, созданный Томсоном, схематически показан на рисунке.

В стеклянный сосуд впаены катод K , и анод A , диафрагма и пластины конденсатора. Между K и A подается достаточно высокое напряжение, необходимое для возникновения катод-



ных лучей. Отверстия в аноде и диафрагме «вырезают» узкий пучок лучей, попадающий на противоположную стенку сосуда, где он вызывает свечение стекла. Пунктирная окружность на рисунке изображает катушки (вне сосуда), создающие магнитное поле, перпендикулярное электрическому полю конденсатора (и плоскости рисунка).

Когда в трубке создано только электрическое поле конденсатора и верхняя пластина заряжена положительно, пучок лучей, если он действительно состоит из отрицательно заряженных частиц, отклоняется вверх (траектория a на рисунке). Если создано только магнитное поле, направленное от нас за плоскость рисунка, пучок отклоняется вниз (траектория b). По свечению торцевой стенки трубки легко установить, куда именно попадает пучок.

Но можно подобрать такие значения напряженности электрического поля \vec{E} и магнитной индукции \vec{B} , чтобы пучок вовсе не отклонялся и двигался по прямолинейной траектории (показанной на рисунке красным цветом). Это означает, что электрическая сила, действующая на частицу, равна по модулю силе Лоренца: $qE = qvB$. Отсюда для скорости частицы получаем выражение $v = E/B$. Подставив его в формулу для удельного заряда, находим

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{B^2 r}. \quad (*)$$

Все в опыте Томсона происходило так, как и предполагалось. В электрическом поле пучок двигался по одной траектории (a), в магнитном — по другой (b). При одновременном действии обоих полей пучок не отклонялся вовсе.

По формуле (*), в которую входят легко измеряемые величины (и не входит скорость частиц), можно было

определить удельный заряд частиц, образующих то, что до того называлось катодными лучами. Удельный заряд этих частиц оказался чудовищно большим: $1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Эти-то частицы и получили название электронов. Поэтому теперь принято считать, что год открытия электрона — 1897, а автор этого важнейшего открытия — Джозеф Джон Томсон.

Так как электроны вылетают из катода разрядной трубки всегда, независимо от того, из какого материала изготовлен катод, можно было сделать вывод о том, что электроны входят в состав любого атома. Эту гипотезу Томсон высказал в том же 1897 году.

В течение нескольких последующих лет Томсон (а также и другие ученые) показал, что частицы, вылетающие из нагретого металла при термоэлектронной эмиссии, имеют тот же удельный заряд, то есть что это тоже электроны. Тот же удельный заряд имеют и частицы, вырывающиеся из металлов светом. И это тоже электроны!

За теоретические и экспериментальные исследования прохождения электричества через газы (приведшие к открытию электрона) Дж. Дж. Томсон в 1906 году получил Нобелевскую премию по физике.

О массе и заряде электрона. Зная значение удельного заряда электрона, еще ничего нельзя сказать ни о значении заряда, ни о значении массы электрона по отдельности. Однако к концу прошлого века было уже известно значение удельного заряда иона водорода, а также то, что заряд иона водорода по модулю (но не по знаку) равен заряду электрона. А это позволяет кое-что сказать о массе электрона. В самом деле, удельные заряды электрона и иона водорода равны соответственно

$$\frac{e}{m_e} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг},$$

$$\frac{e}{m_H} = 9,65 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг}$$

(здесь e — модуль заряда электрона, как его принято обозначать, m_e — масса электрона, m_H — масса иона водорода). Разделив e/m_e на e/m_H , получаем, что масса электрона примерно в 1840 раз меньше массы иона водорода.

Приблизительно через 15 лет после опытов Томсона Р. Милликен в США и А. Ф. Иоффе в России непосред-

венно измерили заряд электрона, который оказался равным $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Отсюда для массы электрона получается значение $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Это самые маленькие значения заряда и массы в природе.

Как увидеть невидимое?

Природа наделила человека бесценным даром зрения, позволяющим ему видеть окружающий мир во всех цветах радуги. И все же надо признать, что возможности нашего зрения ограничены. Во-первых, мы не можем как следует рассмотреть очень мелкие или очень далекие предметы. Во-вторых, длины волн видимого невооруженным глазом света заключены в интервале приблизительно от 0,4 до 0,8 мкм, что составляет ничтожно малую часть диапазона длин существующих в природе электромагнитных волн («Физика 10», § 86).

К некоторым животным природа оказалась более щедрой, чем к человеку, к другим — более скупой. Так, орел, паря на огромной высоте, замечает пробирающуюся по земле мышь, сова прекрасно видит в темноте, а крот почти ничего не видит ни ночью, ни днем.

По мере развития науки и техники человек стал «вооружать» свое зрение. Сначала он «обострил» его в области видимого света. Уже в XVII веке были созданы микроскоп и телескоп, позволившие открыть микроорганизмы и обнаружить горы на Луне. Двадцатый век ознаменовался бурным развитием новой — квантовой — физики, открывшей качественно новые возможности. Например, использование фотоэффекта («Физика 10», § 87) позволило расширить диапазон длин волн,

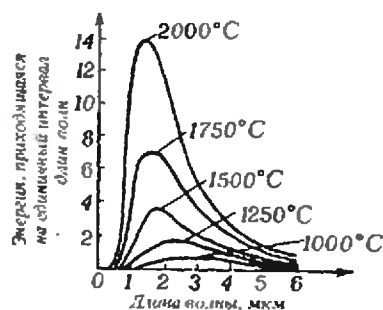


Рис. 1. Распределение энергии теплового излучения по длинам волн.

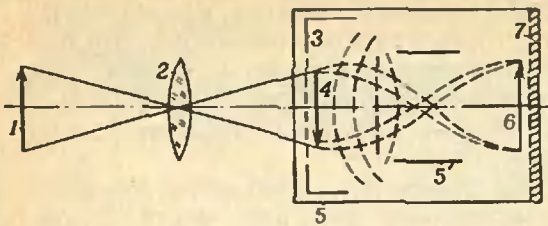


Рис. 2. Схема электроннооптического преобразователя: 1 — предмет, освещаемый инфракрасным светом; 2 — объектив, с помощью которого получается световое изображение; 3 — фотокатод; 4 — световое изображение; 5—5' — фокусирующие электроды; 6 — электронное изображение; 7 — анод, покрытый люминесцирующим веществом.

которые может «увидеть» человеческий глаз. Расскажем об этом немного подробнее.

В тридцатые годы группа голландских физиков во главе с В. Хольстом занималась проблемой улучшения качества фотографического изображения, получаемого в условиях слабой освещенности. Идея предложенного ими метода была довольно простой.

Обычная фотопленка воспринимает видимый свет, отраженный фотографируемым предметом. Однако и сам предмет всегда (при температурах, отличных от абсолютного нуля) служит источником так называемого теплового излучения, которое по своей природе тоже электромагнитное. Оказывается, что длина волны, которой соответствует максимум в распределении энергии этого излучения по длинам волн, зависит от температуры (см. график на рисунке 1, где по оси абсцисс отложена длина волны, а по оси ординат — энергия излучения, приходящаяся на единичный интервал длин волн). При очень высоких температурах тела испускают в основном видимый свет. При комнатных же температурах, когда обычно и производится фотографирование, максимум в излучении приходится на невидимую инфракрасную область. Если бы удалось найти способ преобразовать это невидимое инфракрасное излучение в более коротковолновое, к которому чувствительна фотопленка, то можно было бы фотографировать при слабой освещенности или даже в темноте.

Такой преобразователь был создан и получил название электроннооптического преобразователя. Его основным элементом служит фотокатод —

тонкая прозрачная пленка, изготовленная из материала, содержащего атомы щелочных металлов — цезия, рубидия или калия. Красная граница фотоэффекта λ_{max} для таких материалов находится в инфракрасной области, поэтому при падении на пленку инфракрасных лучей с длинами волн $\lambda < \lambda_{\text{max}}$ свет вырывает из нее электроны. Для восполнения вылетевших при фотоэффекте электронов на пленку напыляется слой металла, настолько тонкий, что пленка остается прозрачной.

Принципиальная схема преобразователя показана на рисунке 2. Изображение предмета 1, освещаемого инфракрасным светом, формируется на фотокатоде 3. Как уже говорилось, тонкий слой металла не является препятствием для лучей, и в тех местах фотокатода, куда попало изображение предмета, с противоположной стороны пленки появляются фотоэмиссионные электроны. На некотором расстоянии за катодом расположен анод 7, поверхность которого покрыта слоем люминесцирующего материала (эта часть прибора напоминает собой обычную телевизионную трубку). Между анодом и катодом создается высокая разность потенциалов (порядка десятков тысяч вольт), которая ускоряет фотоэлектроны. Таким образом возникает поток электронов, летящих от катода к аноду, причем, при соблюдении определенных условий, распределение этих электронов по поверхности анода повторяет форму фотографируемого предмета. Попав на анод, электроны вызывают его свечение. При этом если фотокатод чувствите-



Силуэт человека виден в полной темноте с помощью прибора ночного видения, который воспринимает инфракрасные (тепловые) лучи.

лен к красному и инфракрасному свету, то люминесцирующий анод излучает голубые, фиолетовые и даже ультрафиолетовые лучи. Другими словами, при проецировании на фотокатод невидимого инфракрасного изображения на аноде наблюдается видимое изображение.

Мы изложили здесь лишь принципиальную схему работы электронно-оптического преобразователя, созданного Хольстом с сотрудниками в

1933 году. В их опытах была доказана возможность преобразования длинноволнового невидимого излучения в коротковолновое видимое излучение с помощью фотоэлектрического эффекта.

За прошедшие пятьдесят лет фотоэлектронная техника ушла далеко вперед. В настоящее время она применяется не только в фотографии, но и в научных исследованиях, военном деле, технике, космонавтике.

Избранные школьные задачи

(По мотивам книги Льюиса Кэрролла «История с узелками»)

8 класс

1. Даны длины a и b двух смежных сторон четырехугольника и острый угол α между ними. Кроме того, известно, что углы четырехугольника, прилежащие к каждой из данных сторон, прямые. Найдите: а) остальные стороны четырехугольника; б) площадь четырехугольника.

2. Докажите, что сумму квадратов двух различных натуральных чисел, умноженную на сумму квадратов двух различных натуральных чисел, можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

3. Два путешественника выходят из гостиницы к вершине горы в 3 часа дня и возвращаются в 9 часов вечера. Маршрут их то проходит по ровному месту, то идет в гору или под гору. По ровному месту они идут со скоростью 4 мили в час, в гору — 3 мили в час и под гору — 6 миль в час. Какое расстояние они проходят за время прогулки? Определите также с точностью до 30 мин момент восхождения на вершину горы, считая, что при движении к вершине горы длина участков подъема больше длины участков спуска.

4. На основании данного треугольника найдите такую точку, что прямая, соединяющая основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на боковые стороны, параллельна основанию.

5. Внутри данного угла с вершиной B дана точка P . Проведите через точку P прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

9 класс

6. Два пешехода A и B пускаются в путь ровно в 6 часов утра в один и тот же день. Оба идут по одной дороге и в одном направлении. Пешеход B сначала опережает пешехода A на 14 миль. Оба идут с 6 часов утра до 6 часов вечера. В первый день A , двигаясь в течение дня с постоянной скоростью, проходит 10, во второй — 9, в третий — 8 миль и т. д. Пешеход B , двигаясь также с постоянной в течение дня скоростью, проходит в первый день 2, во второй — 4, в третий — 6 миль и т. д. Где и когда

пешеходы A и B будут догонять друг друга?

7. Две окружности пересекаются так, что их общая хорда стягивает центральные углы в 30° и 60° . Какая часть круга, ограниченного меньшей окружностью, находится внутри большей окружности?

8. В данную окружность впишите трапецию, у которой одно основание в два раза больше другого, а площадь максимальна.

9. стакан лимонада, 3 бутерброда и 7 бисквитов стоят 1 шиллинг 2 пенса. стакан лимонада, 4 бутерброда и 10 бисквитов стоят 1 шиллинг 5 пенсов. Сколько стоят 2 стакана лимонада, 3 бутерброда и 5 бисквитов? (1 шиллинг равен 12 пенсам)

10. В данный остроугольный треугольник впишите треугольник, стороны которого при каждой из его вершин образуют равные углы со сторонами данного треугольника.

10 класс

11. Пусть p — полупериметр некоторого треугольника, S — его площадь, а V — объем прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны сторонам треугольника. Найдите сумму квадратов сторон треугольника.

12. Несколько человек сидят вокруг круглого стола. Каждый из сидящих располагает определенным количеством шиллингов. У первого на 1 шиллинг больше, чем у второго, у второго на 1 шиллинг больше, чем у третьего, и т. д. Первый из сидящих отдает шиллинг второму, второй — два шиллинга третьему и т. д. Каждый отдает следующему на 1 шиллинг больше, чем он получил сам, до тех пор, пока это возможно. В результате у одного из сидящих оказалось в 4 раза больше шиллингов, чем у его соседа. Сколько всего было людей и сколько шиллингов было сначала у самого бедного из них?

13. От данного треугольника тремя прямыми, параллельными сторонами треугольника, отрезаются три треугольника так, что оставшийся шестиугольник оказывается равносторонним. Найдите длину стороны шестиугольника, если длины сторон треугольника равны a , b и c .

14. На плоскости расставлены три цилиндрические башни с радиусами оснований 1, 2, 3. Найдите точку плоскости, из которой их ширина будет казаться одинаковой.

15. Все грани треугольной пирамиды — конгруэнтные треугольники со сторонами a , b , c . Найдите объем этой пирамиды.

Публикацию подготовил А. А. Егоров

Задачи

1. В числовой пирамиде, изображенной на рисунке, расставьте знаки $+$ и $-$ так, чтобы выполнялись указанные равенства. Между некоторыми соседними цифрами можно не ставить знака, объединяя их в одно число.

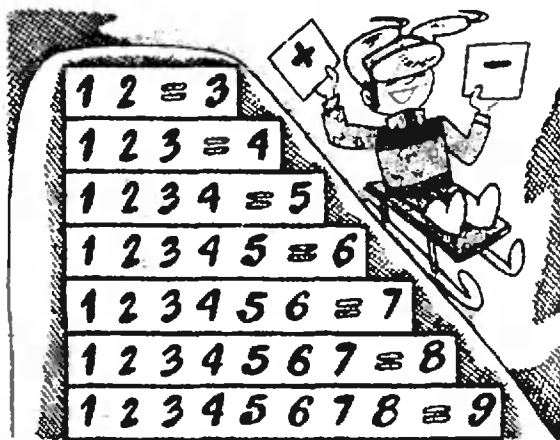
2. Во время подведения итогов соревнования по сбору металлолома выяснилось, что б «А» собрал металлолома больше, чем б «Б» и б «В» вместе, но б «А» и б «Б» собрали вместе столько же металлолома, сколько б «В» и б «Г», кроме того, б «Б» и б «Г» собрали металлолома больше, чем б «А» и б «В». Как распределились места в соревновании этих классов?

3. На столе лежали три карточки с цифрами. Сначала из них сложили наибольшее возможное трехзначное число, потом сложили следующее по величине. Их сумма оказалась равной 1233. Какие цифры были на карточках?

4. Сумма 13 различных натуральных чисел равна 92. Найдите эти числа.

5. Когда я вымыл стаканы в горячей воде и поставил их сушиться вверх доньями на гладкий стол, то они дружно поползли по столу. Я вспомнил, что когда я мыл их холодной водой, то такого с ними не происходило. Почему стаканы начали двигаться?

Эти задачи нам предложили:
 Л. П. Мочалов, А. В. Сигрианский,
 Н. К. Антонович, А. П. Савин.



Победители конкурса «Задачник «Кванта»



Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». Ниже публикуются списки победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1984 года. Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1985 года:



По математике

М. АЛЕКСАНДРОВ — Москва, с. ш. № 542, 9 кл.
 А. АСРЯН — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 10 кл.
 Р. БАБАЕВ — Баку, с. ш. № 145, 10 кл.
 С. ВЕЛЕСЬКО — Минск, с. ш. № 103, 9 кл.
 Э. ВЕЛИМЕТОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
 Л. ВЕРТГЕЙМ — Новосибирск, с. ш. № 25, 10 кл.
 Д. ГАМАРНИК — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 9 кл.
 Р. ГЕНДЛЕР — Ташкент, с. ш. № 110, 8 кл.
 А. ГРИГОРЯН — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.
 А. ДАВТЯН — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.
 С. ДЕМЬЯНЧЕНКО — Москва, с. ш. № 315, 10 кл.
 В. ДЗЮБА — Одесса, с. ш. № 100, 10 кл.
 А. ДЫННИКОВ — Жуковский, с. ш. № 1, 9 кл.
 И. ДЫННИКОВ — Жуковский, с. ш. № 10, 8 кл.
 В. ЕЛИСТРАТОВ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
 В. ЖУРАВЛЕВ — Гайворон, с. ш. № 2, 8 кл.
 С. ЗЕЙНАЛОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
 Л. ЗОСИН — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
 В. КАПОВИЧ — Хабаровск, с. ш. № 2, 9 кл.
 И. КАПОВИЧ — Хабаровск, с. ш. № 2, 9 кл.
 Т. КОБДИКОВ — Павлодар, с. ш. № 3, 10 кл.
 М. КУРИННОЙ — Харьков, с. ш. № 27, 9 кл.
 С. ЛАУСМАА — Коктла-Ярве, с. ш. № 15, 6 кл.
 М. МАКАРОВ — Севастополь, с. ш. № 3, 9 кл.
 Т. МИСИРПАШАЕВ — Москва, с. ш. № 57, 9 кл.
 А. МОЛОТКОВ — Ленинград, с. ш. № 366, 10 кл.
 В. ПОГРЕБНЯК — Винница, с. ш. № 6, 10 кл.
 И. САМОВОЛ — Гайворон, с. ш. № 5, 8 кл.
 Р. СИБИЛЕВ — Ленинград, с. ш. № 30, 9 кл.
 А. ТРУХАН — Минск, с. ш. № 116, 10 кл.
 Е. ФИНК — Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.
 Ю. ШАМРУК — д. Новый Двор Гродненской обл., 7 кл.

По физике

О. АВРАМЕНКО — Херсон, с. ш. № 30, 10 кл.
 В. АПАЛЬКОВ — Харьков, с. ш. № 16, 10 кл.
 Г. АРВЕЛАДЗЕ — Тбилиси, с. ш. № 37, 9 кл.
 А. БАИРАМОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
 А. БЕГЛАРОВ — Тбилиси, с. ш. № 42, 9 кл.
 Э. БОНДАРЕНКО — Полтава, с. ш. № 6, 10 кл.
 Р. БОТАШЕВ — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
 Е. ВАЙНШТЕЙН — Ташкент, с. ш. № 71, 10 кл.
 М. ГОТМАН — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
 А. ДОДА — Корсунь-Шевченковский, с. ш. № 4, 9 кл.
 С. ДУБОВИК — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
 С. ЖИЛИНСКАС — Вильнюс, с. ш. № 9, 11 кл.
 Г. КЛИМОВИЧ — Болшево, с. ш. № 3, 10 кл.
 Д. КУЧУЛОРИЯ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 9 кл.
 А. ЛИХТЦИНДЕР — Ташкент, в. ш. № 49, 10 кл.
 К. ЛОПИН — Фрунзе, с. ш. № 61, 9 кл.
 Д. ЛУНЦ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
 Ю. МАХЛИН — Москва, с. ш. № 57, 9 кл.
 В. МЕНЬКОВ — Мончегорск, с. ш. № 3, 10 кл.
 А. МИКАЛЬКЯВИЧУС — Панаевежис, с. ш. им. Ю. Бальчикониса, 11 кл.
 О. МОРОЗ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
 А. ОНУФРИЕВ — Москва, с. ш. № 91, 10 кл.
 Я. ПУГАЙ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
 С. РАХАМОВ — Казань, с. ш. № 131, 9 кл.
 А. РЖЕВСКИЙ — Новосибирск, с. ш. № 149, 10 кл.
 Р. РИВКИН — Минск, с. ш. № 16, 10 кл.
 М. РУДЫК — Винница, с. ш. № 33, 10 кл.
 М. САВЧЕНКО — Белгород, с. ш. № 3, 10 кл.
 В. САКБАЕВ — Алма-Ата, РОФМШ, 9 кл.
 М. СКОРОВОГАТОВ — Киев, с. ш. № 208, 10 кл.
 С. СТЕПАНЯНЦ — Ереван, ФМШ № 1 при ЕрГУ, 10 кл.
 Б. СУЛЕЙМАНОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
 С. ТУЖАНСКИЙ — Винница, с. ш. № 33, 9 кл.
 Л. ФЕДИЧКИН — Москва, с. ш. № 91, 10 кл.
 С. ФЕРАНЧУК — Минск, с. ш. № 1, 10 кл.
 С. ЧЕРНЫШЕВ — Ташкент, с. ш. № 50, 10 кл.
 А. ЩЕГОЛЕВ — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.

задачник Кванта

Задачи

M911—M915; Ф923—Ф927

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта», № 3 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M911, M912» или «Ф923». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M911. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбираются произвольные точки E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков AF , BF , CE и DE являются вершинами выпуклого четырехугольника, причем его площадь не зависит от выбора точек E и F .

М. В. Старк

M912. Докажите, что а) многочлен x^2 , б) любой многочлен можно представить в виде разности двух многочленов, каждый из которых является монотонно возрастающей функцией.

В. П. Пикулин

M913. Касательные к описанной вокруг треугольника ABC окружности, проведенные в точках A и B , пересекаются в точке P . Докажите, что прямая PC

а) пересекает сторону AB в точке K , делящей ее в отношении $AC^2:BC^2$;

б) симметрична медиане, проведенной из C , относительно биссектрисы угла C треугольника.

С. Литовченко, ученик 10 кл.

M914. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т. д.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

В. Г. Ильичев

M915*. Докажите, что для любых положительных чисел a , b , c , d верно неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Л. Д. Курляндчик

Ф923. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два касающихся друг друга диска, скрепленных нерастяжимой нитью (рис. 1). Диск радиуса R начинает вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр, причем скорость вращения линейно возрастает со временем. В некоторый момент диск меньшего радиуса r отрывается от большого диска (перестает его касаться). На какой угол повернется к этому моменту большой диск? Трение между дисками отсутствует.

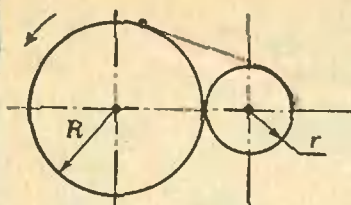


Рис. 1.

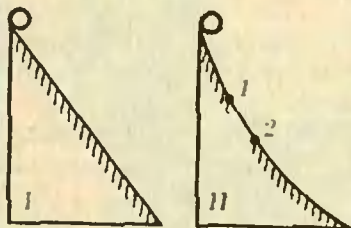


Рис. 2.

Считать, что вся масса диска сосредоточена в его центре.

Л. Г. Маркович

Ф924. В жаркую погоду для быстрого охлаждения воды ее наливают в обросшую льдом формочку, вынутую из морозильной камеры холодильника. Воду «перекатывают» от одного края формочки к другому, потом выливают. Оцените, больше или меньше воды становится при этой операции.

Л. А. Ашкинази

Ф925. Две одинаковых массивных трубы скатываются с горок одинаковой высоты, но разного профиля (рис. 2). По первой горке труба на всем участке движется без проскальзывания; на второй горке имеется абсолютно гладкий участок (участок 1—2), но в конце пути (у подножия горки) труба вновь движется без проскальзывания. У какой трубы в конце горки скорость больше?

А. И. Буздин

Ф926. В пространстве находятся 1985 несоприкасающихся металлических шаров, заряды которых равны, соответственно, $q, -2q, 3q, -4q, \dots, -1984q, 1985q$ ($q > 0$). Докажите, что среди них есть шар, у которого поверхностная плотность заряда всюду неотрицательна. Расстояния между шарами конечны.

В. А. Ясинский

Ф927. Через сцинтилляционный счетчик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, пролетает заряженная частица, и молекулы сцинтиллятора, лежащие вдоль ее траектории, испускают свет. Свет в каждой точке испускается изотропно, то есть равномерно во все стороны. Какая доля световой энергии выйдет из сцинтиллятора в воздух, если коэффициент преломления вещества сцинтиллятора $n=1,6$? Поглощением света в сцинтилляторе пренебречь.

Примечание: телесный угол при вершине конуса равен $\Omega=2\pi(1-\cos \theta)$, где θ — угол между осью конуса и его образующей.

С. А. Хорозов

Problems

M911—M915; P923—P927

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are

M911. Arbitrary points E and F are chosen on sides AB and CD respectively of the quadrilateral $ABCD$. Prove that the midpoints of the segments AF , BF , CE , and DE are the vertices of a convex quadrilateral whose area does not depend on the choice of the points E and F .

M. V. Stark

M912. Prove that a) the polynomial x^2 , b) any polynomial may be represented as the difference of two polynomials, each of which is a monotonic increasing function.

V. P. Pikulin

first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 15th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANTS PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS)**.

M913. The tangents to the circumcircle of triangle ABC at the points A and B intersect at the point P . Prove that the line PC

a) intersects side AB at the point K which divides it in the ratio $AC^2:BC^2$;

b) is symmetric to the median passing through the vertex C with respect to the bisector of the angle C of the triangle.

S. Litovchenko, 10th grade student

M914. Bluebrownblack island is inhabited by 13 blue, 15 brown and 17 black chameleons. If two chameleons of different colours meet, they simultaneously change their colours to the third one (e. g. a blue and brown one both turn black, etc.). Can it happen that after a while all the chameleons will be of the same colour?

V. G. Ilichev

M915*. Prove that for any positive numbers a, b, c, d the inequality

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

holds.

L. D. Kurlyandchik

P923. Two disks, tied together by an inelastic string, are placed, touching each other, on a smooth horizontal plane (Fig. 1). The disk of radius R begins to rotate about a vertical axis passing through its centre, its velocity linearly increasing with time. At a certain moment the disk of smaller radius r moves away from the larger one (they stop touching each other). By what angle will the larger disk have rotated at that moment? There is no friction between the disks. It may be assumed that the mass of each disk is concentrated at its centre.

L. G. Markovich

P924. In order to cool some water on a hot day, the water is poured into an ice-covered receptacle taken out of the freezing compartment of a refrigerator. The water is then "rolled" from one side of the receptacle to the other and poured out. Estimate whether the amount of water will increase or decrease during this operation.

L. A. Ashkinazi

P925. Two identical massive pipes roll down two hills of the same altitude, but of different profiles (Fig. 2). The pipe rolling down the first hill does so without sliding; the second hill has an absolutely smooth section (section 1—2), but at the end of its trajectory the pipe again rolls without sliding. Which pipe will have the greater velocity at the bottom of the hill?

A. I. Buzdin

P926. There are 1985 metallic balls in space, not touching each other, with charges $q, -2q, 3q,$

$-4q, \dots, -1984q, 1985q$ ($q > 0$), respectively. Prove that one of the balls has an everywhere positive charge density on its surface. The distances between the balls are finite.

V. A. Yasinski

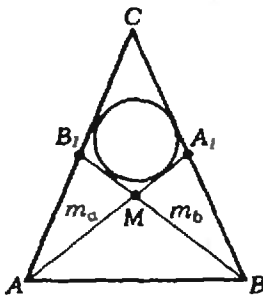
P927. A charged particle flies through a scintillation counter; the scintillating molecules along its trajectory emit light. The light is emitted isotropically (i. e. uniformly in all directions) at each point. What part of the emitted light will leave the scintillator into the air, if the refraction coefficient of the scintillating matter is $n=1.6$? Light absorption in the scintillator may be neglected. Remark. The solid angle at the vertex of a cone equals $\Omega=2\pi(1-\cos \theta)$, where θ is the angle between the cone's axis and its generator.

S. A. Khorozov

Решения задач

M891 — M895; Ф903 — Ф907

M891. Окружность касается двух сторон треугольника и двух его медиан. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.



Обозначим в данном треугольнике ABC длины сторон BC и CA через a и b , длины медиан AA_1 и BB_1 — через m_a и m_b , точку пересечения медиан — через M (см. рисунок). Поскольку отрезок медианы от середины стороны до точки пересечения медиан равен ее трети, а четырехугольник MA_1CB_1 описан около окружности, имеет место равенство $m_a/3 + b/2 = m_b/3 + a/2$ или

$$m_a + \frac{3b}{2} = m_b + \frac{3a}{2} \quad (1)$$

Далее, треугольники AA_1C и BB_1C имеют одинаковые площади (равные половине площади треугольника ABC) и общую вписанную окружность, поэтому их периметры равны: $m_a + a/2 + b = m_b + b/2 + a$, то есть

$$m_a + \frac{b}{2} = m_b + \frac{a}{2} \quad (2)$$

Вычитая равенство (2) из (1), получим $a=b$.

Отметим, что утверждение задачи справедливо и тогда, когда окружность касается продолжений двух сторон треугольника и двух его медиан.

A. A. Муратов

M892. а) Докажите, что среди чисел $2^m + 2^k$, а также среди чисел $3^m + 3^k$ бесконечно много квадратов, а среди чисел $4^m + 4^k$, $5^m + 5^k$ и $6^m + 6^k$ нет ни одного квадрата целого числа (здесь m и k — натуральные числа, $m \neq k$). б)* Есть ли квадраты среди чисел $7^m + 7^k$?

а) Заметим сначала, что если число $a^m + a^k$ является квадратом, то квадратов такого вида бесконечно много: $a^{m+2n} + a^{k+2n} = (a^n)^2 \cdot (a^m + a^k)$ (здесь n или k может равняться и нулю). Поэтому утверждение задачи для $a=2$ и $a=3$ вытекает из равенств $2^3 + 2^0 = 8 + 1 = 3^2$, $3^1 + 3^0 = 2^2$.

Случай $a=4$. Пусть $4^m + 4^k = b^2$, где b — целое число, причем $m > k$; тогда $4^{m-k} + 1 = (b/2^k)^2$ или $4^n + 1 = c^2$ ($n = m - k$, $c = b/2^k$). Отсюда следует, что $(c+2^n)(c-2^n) = 1$, что, очевидно, невозможно.

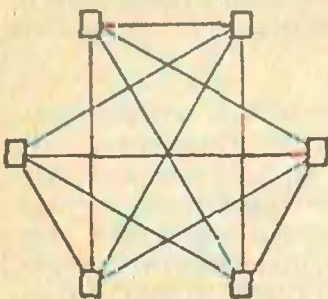
Случай $a=5$. Легко видеть, что число 5^m при любом $m > 1$ кончается цифрами 25, поэтому $5^m + 5^k$ может кончаться только на 30 (при $k=1$) или на 50 (при $k > 1$) и, следовательно, не может быть квадратом (квадрат, кончающийся нулем, должен делиться на 100).

Случай $a=6$. Степень числа 6 всегда кончается на 6, а значит, число $6^m + 6^k$ — на 2. Но квадраты целых чисел могут кончаться только на 0, 1, 4, 6, 9.

б) Ответ: нет. Поскольку 7 при делении на 3 дает в остатке 1, такой же остаток дают и все степени семи. Поэтому число $7^m + 7^k$ дает при делении на 3 остаток 2 и, следовательно, не может быть квадратом ($(3n)^2$ делится на 3, а $(3n \pm 1)^2 = 3(3n^2 \pm 2n) + 1$).

А. И. Зайчик. В. Н. Дубровский

М893. Каждые два из n блоков ЭВМ соединены проводом. Можно ли каждый из этих проводов покрасить в один из $n-1$ цветов так, чтобы из каждого блока выходило $n-1$ проводов разного цвета, если а) $n=6$; б) $n=13$?



М894. а) Сумма пяти неотрицательных чисел равна 1. Докажите, что их можно расставить по кругу так, чтобы сумма пяти попарных произведений соседних чисел не превосходила $1/5$.

б)* По кругу расставлено $n > 4$ неотрицательных чисел, сумма которых равна 1. Докажите, что сумма всех n попарных произведений соседних чисел не превосходит $1/4$.

а) Ответ: можно. Нужная раскраска показана на рисунке.

б) Ответ: нельзя. Действительно, если было использовано m проводов какого-то одного цвета, то число блоков — $2m$ (столько концов у всех этих проводов, а каждый конец подсоединен ровно к одному блоку). Но 13 — нечетное число.

Эту задачу часто формулируют как задачу о составлении расписания кругового турнира — при этом проводам одного цвета отвечает разбиение участников турнира на пары для одного тура. Мы видели, что при нечетных n эта задача неразрешима. Можно доказать, что при четных n она всегда имеет решение (см., например, книгу О. Оре «Приглашение в теорию чисел» (М.: Наука, 1980, гл. 8, § 3), а также решение задачи 1.16 в книге «Заочные математические олимпиады» (М.: Наука, 1981, с. 19)).

В. Б. Алексеев

а) Доказательство будем вести от противного. Допустим, что при любой расстановке чисел a, b, c, d, e рассматриваемая сумма больше $1/5$, в частности (см. рисунки 1 и 2):

$$ab + bc + cd + de + ea > 1/5,$$

$$ac + ce + eb + bd + da > 1/5.$$

Отсюда получим противоречие:

$$1 = (a + b + c + d + e)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + d^2}{2} +$$

$$+ \frac{d^2 + e^2}{2} + \frac{e^2 + a^2}{2} + 2[(ab + bc + cd + de + ea) +$$

$$+ (ac + ce + eb + bd + da)] \geq$$

$$\geq 3(ab + bc + cd + de + ea) +$$

$$+ 2(ac + ce + eb + bd + da) > 1$$

(мы использовали неравенство $x^2 + y^2 \geq 2xy$).

Из решения видно, что условие неотрицательности чисел несущественно. Утверждение задачи

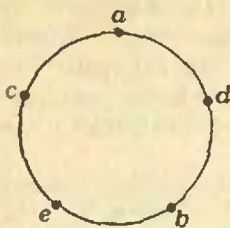


Рис. 1.

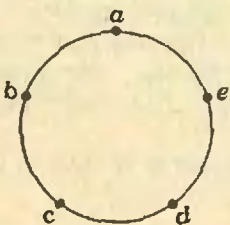


Рис. 2.

(с заменой $1/5$ на $1/n$) справедливо для любых n чисел.

б) Мы должны доказать, что для любых $n \geq 4$ неотрицательных чисел a_1, \dots, a_n , сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 \leq 1/4.$$

При четном n ($n=2m$) это неравенство доказывается непосредственно: пусть $a_1 + a_3 + \dots + a_{2m-1} = a$; тогда, очевидно,

$$a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n \leq (a_1 + a_3 + \dots + a_{2m-1}) \times (a_2 + a_4 + \dots + a_{2m}) = a(1-a) \leq 1/4.$$

Пусть теперь n нечетно и пусть a_k — наименьшее из данных чисел. (Для удобства будем считать, что $1 < k < n-1$ — это не ограничивает общности при $n \geq 4$.) Положим $b_i = a_i$ при $i=1, \dots, k-1$, $b_k = a_k + a_{k+1}$ и $b_i = a_{i+1}$ при $i=k+1, \dots, n-1$. Применяя наше неравенство к числам b_1, \dots, b_{n-1} , получим:

$$a_1 a_2 + \dots + a_{k-1} a_k + (a_{k-1} + a_{k+2}) b_k + a_{k+1} a_{k+2} + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 \leq 1/4.$$

Остается воспользоваться тем, что

$$a_{k-1} a_k + a_n a_{k+1} + a_{k+1} a_{k+2} \leq a_{k-1} a_k + a_{k-1} a_{k+1} + a_{k+1} a_{k+2} \leq (a_{k-1} + a_{k+2}) b_k.$$

Заметим, что в обоих пунктах указанные оценки точные (их нельзя уменьшить); в пункте а) оценка $1/n$ достигается, когда все n чисел равны, а в пункте б) — когда два из них равны $1/2$, а остальные 0.

С. Б. Гашков, А. И. Дранишников

М895*. Докажите, что площадь сечения куба плоскостью, касающейся вписанной в него сферы, не превосходит половины площади грани куба. Рассмотрите случаи, когда это сечение а) треугольник, б) четырехугольник.

в) Докажите, что в случае а) площадь полной поверхности отсекаемого от куба тетраэдра меньше площади грани.

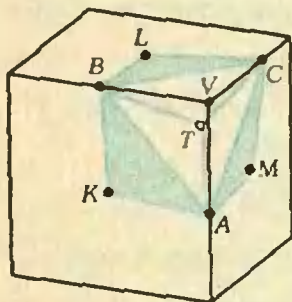


Рис. 1.

а), в). Для краткости мы начнем излагать решения задач а) и в) одновременно. Отметим сразу, что утверждение а) следует из в), так как площадь любой грани тетраэдра (в данном случае — площадь сечения) меньше суммы площадей трех других граней. (Ортогональные проекции этих трех граней на плоскость первой грани полностью ее покрывают, а площади проекций меньше площадей самих граней.) Тем не менее, мы докажем а) независимо, поскольку при этом получится несколько более общий результат.

Обозначим вершины рассматриваемого треугольного сечения куба через A, B, C , общую вершину трех ребер, на которых они лежат — через V , точки касания вписанной сферы с плоскостями ABC, VAB, VBC, VCA — через T, K, L, M (последние три точки, очевидно, — центры граней куба; рис. 1). В силу равенства касательных, проведенных к сфере из одной точки, $AT=AK=AM$, $BT=BK=BL$, $CT=CL=CM$, поэтому треугольники ABK и ABT , BCL и BCT , CAM и CAT (рис. 1), а также AVK и AVM , BVK и BVL , CVL и CVM (рис. 2) попарно равны и, тем более, равновелики. Следовательно, площадь сечения ABC равна сумме S_1 площадей голубых треугольников на рисунке 1, а площадь $S_{\text{тетр}}$ полной поверхности тетраэдра $VABC$ равна сумме площадей четырехугольников $AKBV$, $BLCV$ и $CMAV$, то есть удвоенной сумме

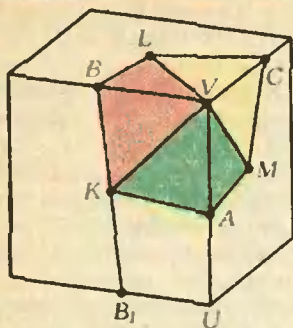


Рис. 2.

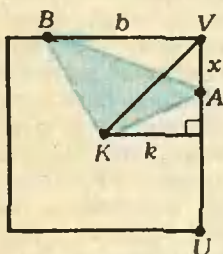


Рис. 3. Площадь треугольника ABK с фиксированными вершинами B и K линейно зависит от $x=VA$: $S_{ABK}=S_{VBK}+S_{VAK}-S_{VAB}=S_{VBK}+x(k-b)/2$, где k — расстояние от точки K до прямой VU , $b=BV$.

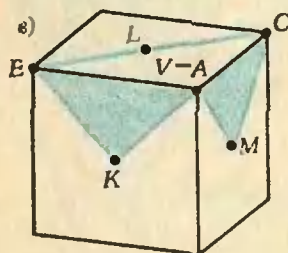
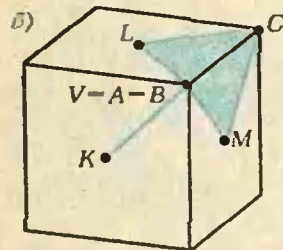
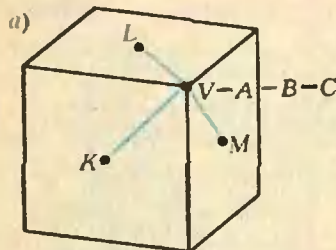


Рис. 4. а—в.

S_2 площадей зеленого, красного и желтого треугольников на рисунке 2:

$$S_{\text{зел}} = 2S_2 = 2(S_{AKV} + S_{BKV} + S_{CLV}) = 2(S_{AKBV} + S_{CLV}).$$

Пусть S_0 — площадь грани куба. Докажем, что для любых трех точек A, B, C на ребрах куба, выходящих из вершины V ,

$$S_1 = S_{ABK} + S_{BCL} + S_{CAM} \leq S_0/2 \quad (1)$$

(и, в частности, утверждение а)).

Для этого заметим, что если две из трех точек, например B и C , закреплены, то площади треугольников ABK и ACM , а значит и вся сумма S_1 , линейно зависят от $x=VA$ (доказательство см. на рисунке 3). Поэтому всегда можно передвинуть точку A в конец ребра так, чтобы величина S_1 возросла (или, во всяком случае, не уменьшилась). То же самое можно проделать последовательно с точками B и C ; следовательно, неравенство (1) достаточно доказать для точек A, B и C , расположенных в вершинах куба. Имеется всего 4 таких расположения (с точностью до переобозначений); они показаны на рисунке 4. В двух случаях $S_1=0$, в двух других $S_1=S_0/2$. Легко понять, что за исключением двух последних случаев неравенство в (1) всегда строгое, но треугольник ABC на рисунке 4, в можно рассматривать как предельное положение сечения, касающегося вписанной сферы, поэтому оценка в задаче а) точная.

Докажем теперь неравенство

$$S_2 = S_{AKBV} + S_{CLV} < S_0/2$$

(и вместе с ним — утверждение в)).

Пусть для определенности $KB \geq KA$. Очевидно, прямая KB делит грань куба на две равные трапеции площади $S_0/2$, одна из которых — VBB_1U (рис. 2) состоит из четырехугольников $AKBV$ и AKB_1U . Таким образом, достаточно доказать, что

$$S_{CLV} < S_{AKBV}$$

Отложим на ребре UV отрезок $UC_1=VC$ (рис. 5); тогда треугольники C_1KU и CLV равны, причем $\angle C_1KU = \angle CLV = \angle AKB_1$.

(Действительно, из равенства одноцветных треугольников на рисунке 2 следует, что $2(\angle CLV + \angle AKB) = \angle AKB + \angle BLC + \angle CMA = \angle ATB + \angle BTC + \angle CTA = 360^\circ = 2(\angle AKB_1 + \angle AKB)$.) Следовательно, $\angle B_1KU = \angle C_1KA$ (рис. 5) и, кроме того, $KB_1 = KB \geq KA$, $KU > KC_1$, поэтому $S_{AKC_1} < S_{B_1KU}$, то есть

$$S_{CLV} = S_{C_1KU} = S_{AKC_1} + S_{AKU} < S_{B_1KU} + S_{AKU} = S_{AKBV}$$

Такие же соображения, как в пункте а), показывают, что и здесь оценка точная.

б) Пусть $ABCD$ — четырехугольное сечение куба, отделяющее от него ребро UV и пересекающее грани с центрами K, L, M, N (рис. 6). Как и выше, легко видеть, что его площадь равна сумме S_3 площадей треугольников ABK, BCL, CDM и DAN , которая, очевидно, меньше суммы

$$S_4 = S_{ABK} + S_{BLCV} + S_{CDM} + S_{DNAU}$$

(Окончание см. на с. 34)

П. Л. Чебышёв

«Сближение теории с практикой дает самые благоприятные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных...»

П. Л. Чебышёв



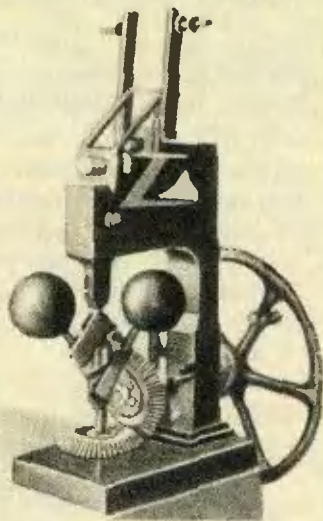
* * *

Пафнутий Львович Чебышёв (1821—1894) — великий русский математик и механик. Ему принадлежат выдающиеся результаты во многих областях математики. В частности, он показал, что количество $\pi(n)$ простых чисел, не превосходящих числа n , с большой точностью описывается зависимостью: $\pi(n) \approx n / \log n$. Чебышёв построил теорию приближения функций многочленами, внес огромный вклад в развитие теории вероятностей. В то же время он много внимания уделял прикладной математике и механике. Известны его работы о рациональном раскрое тканей, строении географических карт, полетах артиллерийских снарядов.

Очень интересны исследования П. Л. Чебышёва по теории и конструированию шарнирных механизмов, которым он посвятил 15 своих работ. Им было придумано и сконструировано около 40 разнообразных механизмов, в числе которых следует отметить «стопходящую машину»,

или, как ее называли, «механическую лошадь», лодку с гребным механизмом, регуляторы к паровой машине (см. фото), арифмометр и многое другое.

П. Л. Чебышёв был и выдающимся педагогом. Он воспитал многих первоклассных математиков, составивших петербургскую математическую школу, традиции которой живы и по сей день.



Нарисуем на клетчатой бумаге какой-нибудь многоугольник с вершинами в узлах сетки, например такой, как на рисунке 1. Попробуем теперь посчитать его площадь. Как это сделать? Наверное, проще всего разбить его на прямоугольные треугольники и прямоугольнички, площади которых уже нетрудно вычислить, и сложить полученные результаты. Последовательно проводя вычисления, получим, что площадь нашего многоугольника равна 20,5, если за единицу площади взять площадь одного квадратика клетчатой бумаги. Но если вспомнить, что сторона такого квадратика равна 0,5 см, а значит, его площадь равна четверти квадратного сантиметра, площадь нашего многоугольника в квадратных сантиметрах будет равна $20,5/4 = 5,125 \text{ см}^2$.

Использованный нами способ несложен, но очень

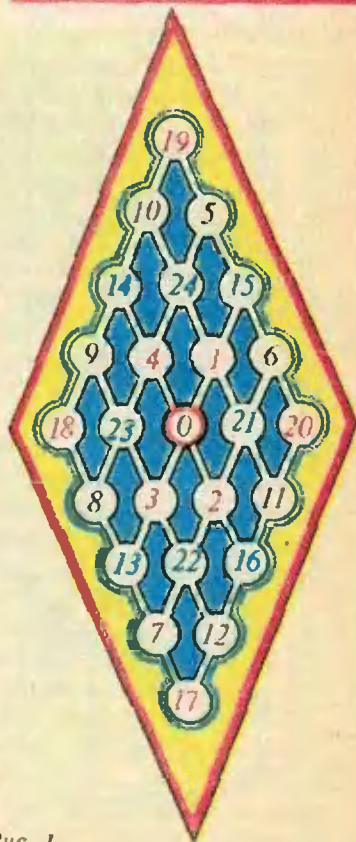


Рис. 1.

Формула площади

громоздок, кроме того, он годится не для всяких многоугольников. Так, многоугольник на рисунке 2 уже нельзя разбить на прямоугольные треугольники и прямоугольники так, как мы это делали с предыдущим многоугольником. Можно, например, попробовать дополнить наш многоугольник до «хорошего», то есть до такого, площадь которого мы сможем вычислить описанным способом, потом из полученного числа вычесть площади добавленных частей.

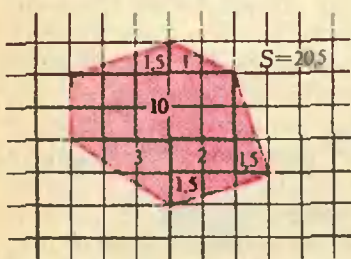


Рис. 1.

Однако оказывается, что есть очень простая формула, позволяющая вычислять площади многоугольников с вершинами в узлах квадратной сетки:

$$S = B + \Gamma / 2 - 1,$$

где S — площадь многоугольника, выраженная в площадях единичных квадратиков сетки, Γ — количество узлов сетки, лежащих на границе многоугольника, а B — количество узлов сетки, лежащих внутри многоугольника. Для многоугольника

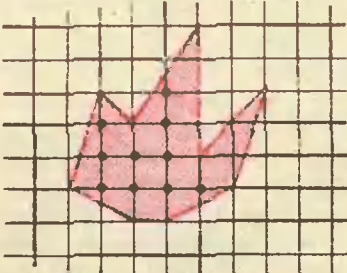


Рис. 2.

на рисунке 3

$$\Gamma = 7, B = 18, \\ S = 18 + 3.5 - 1 = 20.5.$$

Столь же просто сосчитать и площадь многоугольника на рисунке 2:

$$B = 10, \Gamma = 11, \\ S = 10 + 5.5 - 1 = 14.5.$$

Формула, о которой мы рассказали, носит название «формула Пика» по имени открывшего ее немецкого математика. Подробнее об этой формуле можно прочесть в статье Н. Б. Васильева «Вокруг формулы Пика» («Квант» 1974, № 12, с. 39—43).

А. П.

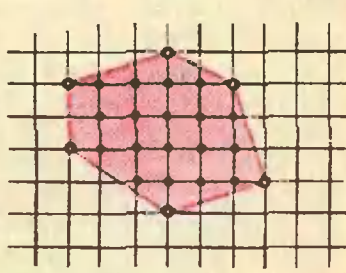


Рис. 3.

ГОЛОВОЛОМКИ

1. Найдите замкнутый путь по дорожкам парка, проходящий через каждую отмеченную числом площадку (рис. 1) не более одного раза, так, чтобы сумма пройденных чисел была наибольшей. А какую наибольшую сумму можно получить на замкнутом пути, проходящем через центральную клетку, если опять разрешается не более одного раза проходить через каждую площадку?

В. Д. Вьюн

2. Впишите в квадратики цифры так, чтобы во всех трех горизонтальных строчках и в каждом из пяти вертикальных столб-

цов получились различные квадраты натуральных чисел (рис. 2).

Л. П. Мочалов

3. На рисунке 3 изображены два варианта головоломки, состоящей из двух пуговиц и нитки. Один из них (какой?) не имеет решения (не распутывается), а второй имеет (какое?).

А. Т. Калинин



Рис. 2.

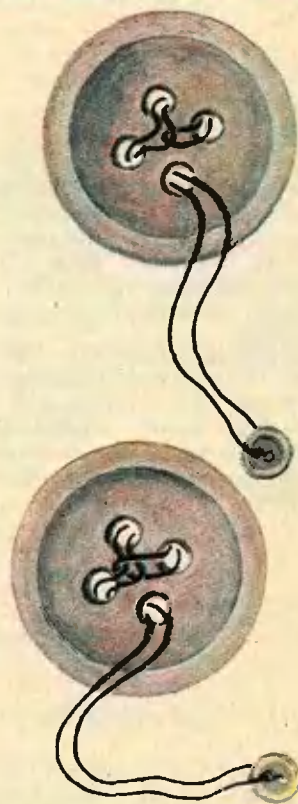


Рис. 3.

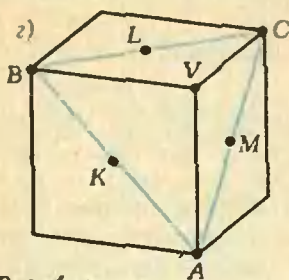


Рис. 4. 2.

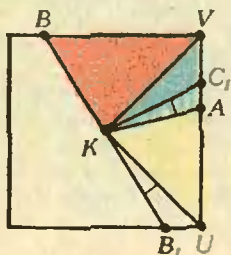


Рис. 5.

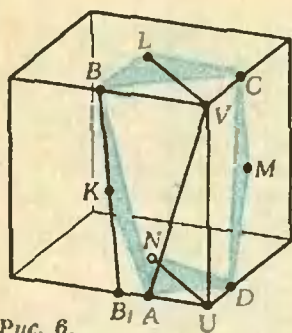


Рис. 6.

(Начало см. на с. 30)

Покажем, что $S_4 = S_0/2$ (S_0 — площадь грани куба). Очевидно, $S_{ABK} = S_{ABB_1}/2$, где B_1 — точка, симметричная B относительно K (см. рис. 6), поскольку треугольники ABK и ABB_1 имеют общее основание AB , а высота первого вдвое меньше высоты второго. Аналогично, $S_{BVL} = S_{BVA}/2$, $S_{AUN} = S_{AUV}/2$. Следовательно, $S_{ABK} + S_{BVL} + S_{AUN} = \frac{1}{2} (S_{ABB_1} + S_{BVA} + S_{AUV}) = \frac{1}{2} S_{BVUB} = \frac{1}{4} S_0$ и, точно так же,

$$S_{CDM} + S_{CVL} + S_{DUN} = \frac{1}{4} S_0.$$

Складывая эти два равенства, мы и получим, что $S_4 = S_0/2$.

Из решения видно, что равенство $S_4 = S_0/2$ верно для любых точек A, B, C, D на тех же ребрах при условии, что центры граней K и M находятся по разные стороны с ребром UV относительно прямых AB и CD соответственно. Если точка A или D совпадает с U , а B или C — с V , то $S_3 = S_4$; в частности, случай, когда $A=U, B=V$, а C и D — середины соответствующих ребер, можно получить как предельное положение сечения, касающегося вписанной сферы, при $A \rightarrow U, B \rightarrow V$, поэтому в этой задаче оценка также точная.

Попробуйте доказать самостоятельно, что боковая поверхность усеченной пирамиды (или призмы) $AUDBVC$ не превосходит S_0 , причем равенство достигается как раз в случае призмы, то есть когда касательная плоскость $ABCD$ параллельна ребру UV .

В. Н. Дубровский

Ф903. На верхней образующей гладкого цилиндра радиуса R , ось которого наклонена под углом α к горизонту, укреплен гибкая невесомая веревка длины l (рис. 1). К другому концу веревки прикреплен небольшой груз. Определить:

1) длину свисающей части веревки в положении равновесия груза;

2) период малых колебаний груза в вертикальной плоскости, параллельной оси цилиндра.

Очевидно, что когда груз находится в положении равновесия, свисающая часть веревки вертикальна (на рисунке 1 это участок BD , где B — последняя точка касания веревки и цилиндра) и, следовательно, образует с осью цилиндра угол $\beta = \pi/2 - \alpha$.

Рассмотрим ту часть веревки, которая лежит на цилиндре. Разобьем ее на множество малых участков, каждый из которых можно считать прямолинейным. Каждый такой участок испытывает действие сил натяжения со стороны двух соседних участков и силы реакции со стороны цилиндра. Так как трение отсутствует, сила реакции в каждой точке касания веревки и цилиндра перпендикулярна поверхности цилиндра (то есть направлена по перпендикуляру к соответствующей образующей, который проходит через ось цилиндра). Поскольку веревка невесомая, силы натяжения, действующие на отдельный участок, имеют одинаковые по абсолютной величине проекции на направление образующей. Значит, все участки веревки пересекают соответствующие образующие под одним и тем же углом, равным $\beta = \pi/2 - \alpha$. Отсюда следует, что если мысленно «развернуть» верхнюю четверть цилиндра (от образующей, проходящей

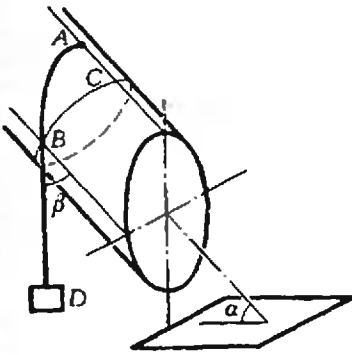


Рис. 1.

через точку B , до образующей, проходящей через точку A), то участок BA веревки перейдет в прямолинейный отрезок BA . Найдем длину этого отрезка.

Проведем сечение цилиндра, перпендикулярное его оси и проходящее через точку B . Пусть C — верхняя точка этого сечения (см. рис. 1). При «развороте» верхней четверти цилиндра точки A , B и C окажутся лежащими в вершинах прямоугольного треугольника с прямым углом BCA (рис. 2). Угол ABC равен $\pi - \pi/2 - \beta = \alpha$, и $|BA| = |BC|/\cos \alpha$. Но $|BC| = \pi R/2$, так что

$$|BA| = \frac{\pi R}{2 \cos \alpha}.$$

Следовательно, длина свободно свисающей части веревки равна

$$|BD| = l - \frac{\pi R}{2 \cos \alpha}.$$

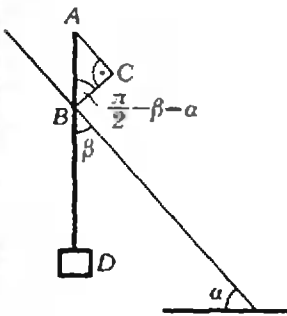


Рис. 2.

После того как грузу сообщат небольшую скорость в вертикальной плоскости, параллельной образующей цилиндра, он на протяжении всего движения будет находиться в этой вертикальной плоскости. Поскольку веревка все время натянута, то в любом промежуточном положении свисающая часть ($B'D$) будет образовывать прямую, а вся веревка будет лежать в плоскости, проходящей через точку A . Роль кривой AB' будет такая же, как если бы точка A находилась на вертикали над точкой B на расстоянии $\pi R/2 \cos \alpha$ выше нее.

Отсюда для периода малых колебаний груза получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

С. С. Крогов

Ф904. Сферу радиуса R , составленную из двух одинаковых плотно пригнанных тонкостенных полушфер массы m каждая, наполняют жидкостью с плотностью ρ .

- 1) Какую вертикальную силу надо приложить к нижней полушфере, чтобы жидкость не выливалась, если верхняя сфера закреплена (рис. 1)?
- 2) С какой силой надо сжимать левую и правую полушферы (рис. 2), чтобы жидкость не выливалась?

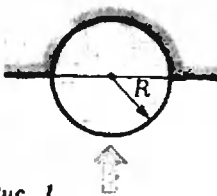


Рис. 1.

- 1) Рассмотрим условие равновесия нижней полушферы, заполненной жидкостью. На эту систему действуют сила тяжести

$$F = mg + \rho g \cdot \frac{2}{3} \pi R^3,$$

сила F_1 давления со стороны жидкости из верхней полушферы; вертикальная сила F_2 , которую надо приложить к полушфере, чтобы жидкость не выливалась, определяется условием равновесия:

$$F_2 = F + F_1.$$

Согласно закону Паскаля давление в жидкости в центре сферы равно

$$p_1 = \rho g R,$$

и, следовательно,

$$F_1 = p_1 \pi R^2 = \rho g \pi R^3.$$

Таким образом,

$$F_2 = mg + \frac{2}{3} \rho g \pi R^3 + \rho g \pi R^3 = g \left(m + \frac{5}{3} \rho \pi R^3 \right).$$

- 2) Запишем условие равновесия заполненной жидкостью правой полушферы (см. рис. 2) в проекциях на горизонтальную ось:



Рис. 2.

$$F_2 = F_x,$$

где F_2 — сила давления на правую полусферу со стороны жидкости в левой полусфере, F_x — сила, которую необходимо приложить к правой полусфере, чтобы жидкость не выливалась.

Найдем значение F_2 . Давление жидкости внутри сферы линейно возрастает по мере увеличения глубины от 0 до $2\varrho gR$. Следовательно,

$$F_2 = \sum_i p_i s_i = p_{cp} S = \varrho g R \pi R^2 = \varrho g \pi R^3$$

(здесь p_i — давление на участок площади s_i , лежащий в центральном вертикальном сечении).

Таким образом, минимальная сила, которую надо приложить к правой полусфере, чтобы жидкость не выливалась, равна

$$F_x = \varrho g \pi R^3.$$

Л. Г. Маркович

Ф905. Тонкостенный заполненный газом цилиндр массы M с высотой H и площадью основания S плавает в воде (рис. 1). В результате потери герметичности в нижней части цилиндра его глубина погружения увеличилась на ΔH . Каково было начальное давление газа в цилиндре? Атмосферное давление p , температура не меняется.

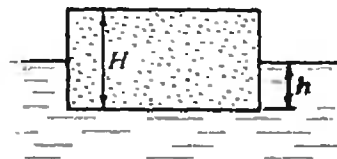


Рис. 1.



Рис. 2.

Пусть цилиндр первоначально был погружен в воду на глубину h (см. рис. 1). Тогда

$$Mg = \varrho_w g h S \Rightarrow h = \frac{M}{\varrho_w S}.$$

Нетрудно показать, что если в результате потери герметичности цилиндр опустился еще на глубину ΔH , то это значит, что высота Δx уровня воды, которая затекла в цилиндр, как раз равна ΔH . Действительно, в новом положении равновесия (рис. 2)

$$Mg + \varrho_w g S \cdot \Delta x = \varrho_w g S(h + \Delta H) \Rightarrow \Delta x = \Delta H.$$

Найдем давление p_1 газа в цилиндре, заполненном частично водой. Сумма давления p_1 и давления столба воды высоты ΔH на дно цилиндра должна быть равна давлению в воде на глубине $h + \Delta H$, то есть

$$p_1 + \varrho_w g \cdot \Delta H = p + \varrho_w g(h + \Delta H).$$

Отсюда

$$p_1 = p + \varrho_w g h = p + \frac{Mg}{S}.$$

Итак, газ занимает объем $V_1 = S(H - \Delta H)$ и давление газа равно p_1 . Согласно закону Бойля — Мариотта

$$p_1 V_1 = p_0 V_0,$$

где p_0 — первоначальное давление газа, когда он занимал объем $V_0 = SH$. Таким образом,

$$\left(p + \frac{Mg}{S}\right) S (H - \Delta H) = p_0 SH,$$

откуда

$$p_0 = \left(p + \frac{Mg}{S}\right) \left(1 - \frac{\Delta H}{H}\right).$$

О. Ю. Никишина

Ф906. Проводник, сопротивление которого зависит от температуры, подключили к источнику постоянного напряжения U . Сопротивление проводника меняется в зависимо-

Тепловая мощность, выделяющаяся в проводнике, когда он подключен к источнику с напряжением U , равна

$$W_+ = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_0(1 - \mu t)}.$$

сти от температуры по закону $R=R_0(1-\mu t)$, где R_0 — сопротивление при $t=0^\circ\text{C}$, $\mu>0$. Определить установившуюся температуру проводника, если температура окружающей среды равна 0°C , а тепловая мощность, выделяемая проводником в окружающую среду, равна $W=b \cdot \Delta t$, где Δt — разность температур проводника и среды. Изменением размеров проводника из-за теплового расширения пренебречь.

Проводник будет находиться в тепловом равновесии, если эта мощность будет равна тепловой мощности $W_-=bt$, выделяемой проводником в окружающую среду. Из условия $W_+=W_-$ найдем, при каких температурах возможно тепловое равновесие проводника:

$$\frac{U^2}{R_0(1-\mu t)}=bt,$$

откуда

$$t=\frac{1}{2\mu} \pm \sqrt{\frac{1}{4\mu^2} - \frac{U^2}{R_0 b \mu}} = \frac{1}{2\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - U^2 \frac{4\mu}{R_0 b}} \right).$$

Перепишем подкоренное выражение в виде

$$1 - (U/U_0)^2, \text{ где } U_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_0 b}{\mu}}:$$

$$t = \frac{1}{2\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{U}{U_0}\right)^2} \right) \quad (*)$$

(физический смысл параметра U_0 , имеющего размерность напряжения, станет ясным после анализа решений уравнения (*)).

Рассмотрим три возможных случая:

а) $U < U_0$; уравнение (*) имеет два решения:

$$t_1 = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{U}{U_0}\right)^2} \right), \quad t_2 = \frac{1}{2\mu} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{U}{U_0}\right)^2} \right).$$

б) $U = U_0$; решение уравнения (*) —

$$t_0 = \frac{1}{2\mu}.$$

в) $U > U_0$; уравнение (*) не имеет действительных корней. Это означает, что при условии $U > U_0$ тепловое равновесие невозможно.

Чтобы лучше уяснить физический смысл полученных математических выражений, построим графики функций $W_+(t)$ и $W_-(t)$ для случаев а), б) и в).

В случае а) графики этих функций имеют две общие точки, соответствующие состояниям теплового равновесия, — при $t=t_1$ и при $t=t_2$. Однако при $t=t_2$ равновесие неустойчиво: если $t_1 < t < t_2$, то $W_- > W_+$ — происходит охлаждение провода; если $t > t_2$, то $W_+ > W_-$ — провод нагревается (в принципе — до температуры плавления). Устойчивое тепловое равновесие устанавливается при температуре $t=t_1$.

В случае б) графики $W_+(t)$ и $W_-(t)$ имеют одну общую точку — при $t=t_0$. Но и это равновесное состояние неустойчиво: с повышением температуры ($t > t_0$) $W_+(t)$ растет быстрее, чем $W_-(t)$, — провод разогревается.

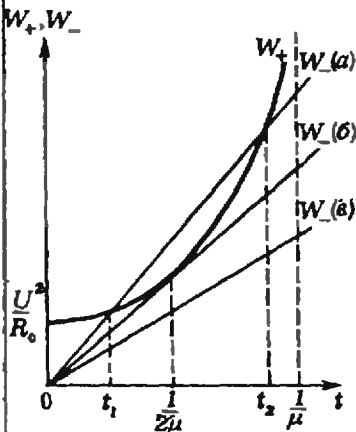
В случае в) графики не пересекаются — при $U > U_0$ тепловое равновесие невозможно.

Итак, тепловое равновесие провода возможно

при $U < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_0 b}{\mu}}$; установившаяся температура

$$t = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \sqrt{1 - U^2 \frac{4\mu}{R_0 b}} \right).$$

Р. Ю. Винокур



Ф907. Два металлических шара массы m каждый с радиусами r и $2r$ помещены в электрическое поле, напряженность которого направлена от большего шара к меньшему и равна E . Расстояние между центрами шаров равно $R_0 = 4r$. Большой шар несет заряд q ($k \frac{q}{r} \ll E$), малый шар не заряжен. Шары отпускают. Время между первым и вторым соударениями шаров равно τ . Найти время между n -м и $(n-1)$ -м соударениями и пути, которые пройдут шары между этими соударениями. Чему равно среднее ускорение шаров за достаточно большой промежуток времени? Соударения считать абсолютно упругими.

Когда шары отпускают, маленький шар остается неподвижным (действие силы тяжести не учитываем). Большой шар начинает двигаться с ускорением $a = qE/m$; через время $t = \sqrt{2(R_0 - 3r)/a} = \sqrt{2r/a}$ он подойдет к меньшему шару, имея скорость $u = at = \sqrt{2ra}$. В результате соударения шары обменяются скоростями: большой шар сразу после соударения будет иметь скорость 0, а маленький — скорость $u = \sqrt{2ra}$. Так как шары металлические, при соударении заряд q распределится по обоим шарам. Пусть αq — заряд большего шара после соударения ($\alpha < 1$); тогда заряд меньшего шара будет $(1-\alpha)q$. Понятно, что при следующих соударениях заряды шаров меняться не будут. Ускорения, с которыми будут двигаться шары между соударениями, — $\alpha qE/m = \alpha a$ (большой шар) и $(1-\alpha)qE/m = (1-\alpha)a$ (меньший шар). При каждом соударении шары будут обмениваться скоростями.

Второе соударение произойдет через время τ после первого. Из условия равенства путей, пройденных шарами между первым и вторым соударениями, —

$$\frac{\alpha a}{2} \tau^2 = \sqrt{2ra} \tau + \frac{(1-\alpha)a}{2} \tau^2,$$

— найдем значение αa :

$$\alpha a = \frac{1}{2} a + \frac{\sqrt{2ra}}{\tau}.$$

Перед вторым соударением большой шар имеет скорость $\alpha a \tau = \frac{1}{2} a \tau + \sqrt{2ra}$, а меньший — $\sqrt{2ra} + (1-\alpha)a\tau = \frac{a\tau}{2}$.

Для определения времени между вторым и третьим соударениями перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью $a\tau/2$ (скорость большого шара сразу после второго соударения). В этой системе в первый момент времени большой шар имеет скорость 0, а меньший — $\sqrt{2ra}$. Но это значит, что время между вторым и третьим соударениями также равно τ .

Рассуждая аналогичным путем, придем к выводу, что времена между всеми последовательными столкновениями равны τ .

Из проведенных расчетов ясно, что скорость большого шара после n -го соударения равна $\frac{a\tau}{2}(n-1)$. Учитывая это, найдем путь, пройденный шарами между n -м и $(n+1)$ -м соударениями:

$$S = \frac{a\tau}{2}(n-1)\tau + \frac{\alpha a}{2} \tau^2 = \frac{a\tau^2}{2} \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{2ra} \tau}{2}.$$

Среднее ускорение, с которым будет двигаться система (центр масс шаров), равно

$$a_{ц.м.} = \frac{qF}{2m}.$$

А. А. Ланидес

Задача о восьми точках

Кандидат физико-математических наук
Н. Б. ВАСИЛЬЕВ

В этой заметке речь идет о задаче, предлагавшейся десятиклассникам в апреле прошлого года на последней Всесоюзной олимпиаде по математике в Ашхабаде.*) Приведем с незначительными изменениями ее формулировку.

Задача 1. Около треугольника ABC описана окружность. Через произвольную точку P в плоскости треугольника (не лежащую на окружности) проводятся прямые AP , BP , CP и отмечаются вторые точки их пересечения с окружностью. Докажите, что найдется не более 8 точек P , для которых отмеченные точки не совпадают ни с одной из точек A , B , C и служат вершинами треугольника, равного треугольнику ABC .

Эта задача оказалась довольно трудной. Некоторые участники решали ее, перебирая разные расположения точки P относительно прямых AB , BC , CA и окружности. Здесь приводится другое, более поучительное решение этой задачи, использующее «язык движений»: мы представим себе, что отдельные элементы нашей конфигурации вращаются, и в некоторый момент возникает нужная фигура.

Сначала решим следующую «обратную» задачу.

Вращение и пересечения прямых

Задача 2. В окружность вписаны два (не обязательно равных) треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Треугольник ABC закреплен, а треугольник $A_1B_1C_1$ вращается вокруг центра окружности. При каком положении прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 будут проходить через одну точку P ? Сколько будет таких положений?

Дадим сразу ответ на второй вопрос (он будет использован ниже): такое положение лишь одно, то есть за время полного оборота треугольника $A_1B_1C_1$ прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 лишь однажды пересекутся в одной точке (а в некотором «вырожденном» случае такого положения вообще не будет).

Решить задачу 2 помогает метод геометрических мест.

Лемма. Пусть хорда AB окружности закреплена, а хорда A_1B_1 скользит концами по окружности. Тогда угол φ между прямыми AA_1 и BB_1 остается неизменным, а точка M пересечения этих прямых (если $\varphi \neq 0$) описывает окружность, проходящую через точки A и B (рис. 1).

Наметим доказательство леммы. Если точки A_1 и B_1 равномерно с одинаковой скоростью движутся по окружности, то прямые AA_1 и BB_1 совершают равномерное вращение с одинаковой угловой скоростью вокруг точек A и B , а значит, угол между ними остается постоянным (на рисунке 1 для точек M по одну сторону от прямой AB угол AMB равен φ — углу между прямыми, а для точек M по другую сторону от AB угол AMB равен $\pi - \varphi$). Если в начальный момент прямые AA_1

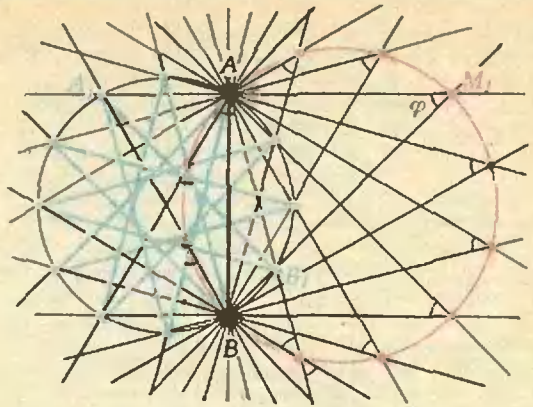


Рис. 1. Если точки A и B закреплены, а точки A_1 и B_1 с одинаковой угловой скоростью ω движутся по окружности, то прямые AA_1 и BB_1 вращаются с угловой скоростью $\omega/2$, а их точка пересечения M движется по красной окружности (с угловой скоростью ω).

и BB_1 пересекались в некоторой точке M_1 , то описанная около треугольника ABM_1 окружность и будет искомой траекторией точки M , причем M также равномерно движется по окружности (угловая скорость вращения прямых равна половине угловой скорости вращения по своим окружностям точек A_1 , B_1 и M).

За этим наглядным рассуждением «на языке вращений» скрыто, как легко видеть, многократное использование теоремы о величине вписанного угла.*)

К лемме нужно сделать два уточнения, которые окажутся существенными в дальнейшем.

1°. Особый случай $\varphi = 0$ возникает, если хорды AB и A_1B_1 равны по длине, причем в некоторый начальный момент времени точка A_1 совпадает с B , а B_1 с A . В этом случае в начальный момент прямые AA_1 и BB_1 просто совпадают, а при дальнейшем движении будут все время параллельны друг другу.

2°. В тот момент времени, когда A_1 совпадает с A (или B_1 с B), прямую AA_1 (соответственно BB_1) «по непрерывности» нужно считать направленной по касательной к данной окружности (или, если этого не делать, нужно исключить соответствующие две точки из найденного геометрического места — окружности).

Вернемся к задаче 2. Построим, пользуясь леммой, две окружности — геометрические места точек пересечения прямых AA_1 и BB_1 , а также BB_1 и CC_1 (рис. 2). Первая проходит через точки A и B , вторая — через точки B и C . На роль точки P , где должны пересекаться все три прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 (она, разумеется, не может лежать на данной окружности), годится лишь одна точка — отличная от B точка пересечения двух построенных окружностей. (Нам нет нужды строить геометрическое место точек пересечения AA_1 и CC_1 — третью окружность, проходящую через A и C , — она, конечно, автоматически пройдет через ту же точку P пересечения двух построенных окружностей.) Итак, вообще говоря, существует лишь одно положение треугольника $A_1B_1C_1$, удовлетворяющее нужному условию. В любом случае, с учетом сделанных выше уточнений, мы можем утверждать, что нужных точек P не более одной (особый

*) Другие задачи олимпиады были разобраны в «Кванте» № 11 за 1984 г.

*) О «языке движений» в геометрии подробно рассказывается в книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые» (М., Наука, 1978).

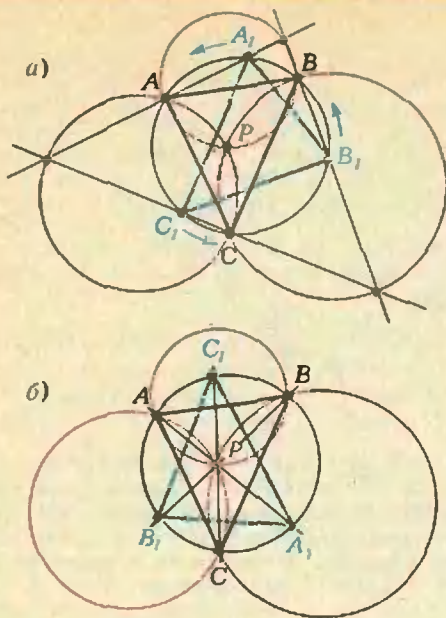


Рис. 2. Точка P находится на пересечении двух геометрических мест: когда прямая BB_1 повернется в положение BP , то AA_1 и CC_1 совпадут с AP и CP .

случай изображен на рисунке 3). Задача 2 решена.

Теперь можно заняться задачей 1. Для каждой точки P , не лежащей на окружности, обозначим через A_1, B_1 и C_1 вторые точки пересечения с окружностью прямых AP, BP и CP . Условие задачи выделяет те точки P , для которых треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC ; на первый взгляд может показаться, что, взяв в задаче 2 равные треугольники, мы найдем лишь один нужный $\triangle A_1B_1C_1$ (симметричный треугольнику ABC относительно центра окружности). Но тут есть тонкость, не столько геометрическая, сколько логическая. Мы объясним ее после небольшого отступления.

Перестановка вершин и симметрии

Все знают, что равные (по другой терминологии «конгруэнтные») треугольники по определению имеют соответственно равные углы и стороны, так что их можно совместить наложением. В учебном пособии академика А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» равенство треугольников $\triangle ABC = \triangle DEF$, вершины которых обозначены буквами, принято всегда записывать так, чтобы соответствующие вершины шли в одном и том же порядке (то есть так, что $\bar{A} = \bar{D}, \bar{B} = \bar{E}, \bar{C} = \bar{F}, AB = DE$ и т. д.).

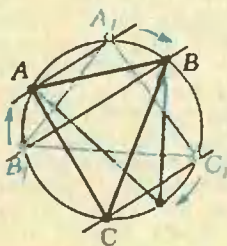


Рис. 3. Особый случай $\varphi = 0$, когда точка P не существует (прямые AA_1, BB_1 и CC_1 остаются параллельными).

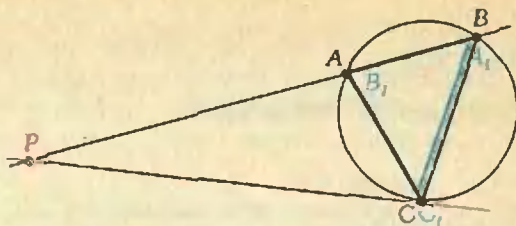


Рис. 4. Особый случай: точка P возникает в момент совпадения треугольников.

Прочитав еще раз условие задачи 1, можно заметить, что в этом смысле наш $\triangle A_1B_1C_1$ не обязан равняться треугольнику ABC — он может быть равен (с учетом соответствия вершин) любому из шести треугольников $ABC, BSA, CAB, BAC, ACB, CBA$. И это число вариантов нужно еще удвоить, уже по чисто геометрической причине: $\triangle A_1B_1C_1$ может быть, как говорят, «собственно равным» треугольнику ABC — то есть может быть совмещен с ним непрерывным движением в плоскости (в нашей задаче — поворотом R), либо «зеркально равным» — при этом для совмещения треугольников один из них нужно «перевернуть» (в нашей задаче достаточно сделать симметрию S относительно некоторой прямой: все треугольники $A_1B_1C_1$, зеркально равные треугольнику ABC , будут получаться друг из друга поворотами). Для различения этих случаев мы будем писать над равенством треугольников букву R или S . И для каждого из $2 \cdot 6 = 12$ вариантов мы, применив задачу 2, можем построить (не более чем) одну нужную точку P .

Более наглядно это рассуждение можно пояснить так: мы берем картонный треугольник T (с тем же радиусом описанной окружности, что и у треугольника ABC), помещаем его вершины на окружность, положив на плоскость той или другой стороной, обозначаем их буквами A_1, B_1, C_1 (6 способов) и, вращая его как в задаче 2, находим для каждого из $2 \cdot 6$ вариантов точку P .

Чтобы закончить решение задачи 1, остается объяснить, почему в случае $T = \triangle ABC$ исключаются 4 варианта. Один из них (случай

$\triangle ABC \stackrel{S}{=} \triangle A_1B_1C_1$) исключается сразу (здесь для каждой из трех сторон возникает особый случай 1^о леммы — см. рис. 3, — так что при вращении треугольника $A_1B_1C_1$ прямые AA_1, BB_1 и CC_1 никогда не проходят через одну точку). Кроме того, условие, что точки A_1, B_1 и C_1 не должны совпадать ни с одной из вершин A, B, C , исключают случай $\triangle BAC \stackrel{R}{=} \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 4), а также два аналогичных —

$\triangle ACB \stackrel{R}{=} \triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle CBA \stackrel{R}{=} \triangle A_1B_1C_1$; здесь точка P возникает в тот момент, когда треугольники полностью совпадают (и при этом проявляются сразу обе особенности 1^о и 2^о, см. рис. 4). Задача 1 решена.

Тем, кто не ленится доводить начатое дело до конца, мы предлагаем подумать еще над следующими вопросами. 1) Верно ли, что в общем случае все 12 (а в случае $T = \triangle ABC$ — все 8 не исключенных нами) вариантов реализуются и приводят, как правило, к разным точкам P (попробуйте поэкспериментировать с помощью циркуля и линейки)? 2) На сколько уменьшается число 12 (и — в частном случае — число 8) для равнобедренного или равностороннего треугольника T ?

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М866 — М880, Ф878 — Ф892, справились с задачами М871, Ф878, Ф880, Ф881, Ф890. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Х. Агаев (с. Тьюркоба Аз. ССР) 67, 69; *Н. Агазян* (Абовян) 72, 73, 75—80; *М. Александров* (Москва) 66—69, 73, 74, 77, 78, 80; *Р. Алексеев* (Ленинград) 66—70, 72—75; *Я. Алиев* (Баку) 66, 69, 73, 78, 79; *Д. Алтаев* (Чимкент) 73, 75; *Г. Андреева* (Пермь) 68, 69, 76, 79; *А. Асрян* (с. Грибоедов Арм. ССР) 76—80; *Р. Бабаев* (Баку) 66, 68, 69, 76, 79; *М. Байрамов* (Баку) 69, 73, 78, 79; *А. Барабаш* (Киев) 66—70, 72, 73, 75; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 66—70, 72, 73, 75, 77, 78; *М. Барон* (Ленинград) 66, 69, 70, 73, 75; *Т. Батбаяр* (Улан-Батор, МНР) 79; *Б. Батгорал* (Улан-Батор, МНР) 76; *А. Багыров* (Москва) 67, 68, 70, 72, 73, 76, 79; *Ю. Бекетов* (Ленинград) 73, 76; *А. Бирман* (Донецк) 67, 69, 72, 73, 75, 76; *А. Бирюков* (Саратов) 67, 68, 72, 73, 75, 76, 78; *Д. Богатырев* (Пенза) 73; *О. Бондарев* (Киев) 73; *Д. Боровской* (Ульяновск) 68; *А. Бурд* (Ярославль) 69; *А. Бурлука* (Ростов) 73; *И. Вайнштейн* (Калинин) 69; *И. Вайнштейн* (Первоуральск) 67, 69; *А. Валиев* (Грозный) 73; *Д. Валунас* (Друскининкай) 67, 69; *В. Васильев* (Москва) 67—69; *А. Ващенко* (Дзержинск) 66, 67, 69; *С. Велеско* (Минск) 73—75; *Э. Велиметов* (Баку) 78, 79; *И. Верный* (Киев) 78; *Л. Вергейм* (Новосибирск) 66—70, 72—74, 76—79; *Р. Видгон* (Баку) 67, 69, 72, 73, 75, 76; *Т. Газарян* (Ереван) 66—69, 76—80; *Д. Гамарик* (Тбилиси) 72, 73, 76—79; *Т. Гамбарян* (Баку) 66, 69, 73; *Р. Гендлер* (Ташкент) 66—70, 72, 73, 76—79; *Д. Гехтман* (Киев) 67—69, 72, 73, 75, 76; *А. Глазюк* (Киев) 76, 78; *Д. Глек* (Воронеж) 69; *Э. Годзданкер* (Витебск) 69, 72, 73, 75; *Л. Гольдштейн* (Киев) 67, 69, 80; *В. Гордиюк* (Киев) 66, 67, 73, 76; *В. Городничий* (Днепропетровск) 66—69, 73, 76, 78; *Е. Гороховская-Усвегова* (Ташкент) 66; *Ю. Грабовский* (Киев) 68; *Н. Григорьева* (Андропов) 66, 67, 69, 70; *А. Григорян* (с. Маджадия Гр. ССР) 76—80; *А. Гродницкий* (Севастополь) 69, 73; *И. Гроздева* (Бургас, НРБ) 72, 73, 76; *И. Гуров* (Баку) 66, 67, 69; *А. Давтян* (п. Мецамор Арм. ССР) 72—80; *Ю. Дейкало* (Киев) 76; *В. Демидов* (Армавир) 68, 69; *С. Демьяненко* (Москва) 66—70, 73, 76, 77; *А. Джафаров* (Баку) 66, 67, 69; *В. Дзюба* (Одесса) 66—69, 72, 73, 75, 76, 78; *Д. Димова* (Ямбол, НРБ) 67—69, 73; *Е. Доманицкая* (Ленинград) 66, 67, 73; *А. Дубровин* (Воронеж) 66, 76; *А. Дынников* (Жуковский) 66—70, 72, 73, 75—78, 80; *И. Дынников* (Жуковский) 66—70, 73, 75—78; *Д. Ежинов* (Минск) 73; *В. Елстратов* (Донецк) 66—68; *А. Еременко* (Киев) 78, 79; *А. Еренбург* (Запорожье) 73; *В. Журавлев* (Гайворон) 66, 67, 69, 70, 73, 75, 76, 78, 79; *А. Захаров* (Гатчина) 66, 72, 76, 78; *С. Зейналов* (Баку) 66, 69, 73, 76, 78—80; *Л. Зосин* (Киев) 66—69, 72, 73, 75—77, 80; *А. Иванов* (Первомайск) 67, 69; *Л. Иванов* (Саратов) 66—70; *В. и И. Капловичи* (Хабаровск) 66—70, 72, 73, 75—77; *А. Касимов* (Киев) 73, 76; *Д. Кашпер* (Киев)

76, 78; *Р. Керимбеков* (Орджоникидзе) 69; *П. Кирилин* (Дубна) 67—70, 72—75; *О. Кириновский* (Винница) 73, 75—79; *А. Киселев* (Ленинград) 66, 67; *И. Кича* (Киев) 73, 76, 79; *И. Клизман* (Калинин) 67; *А. Кноп* (Винница) 73; *Т. Кобдинов* (Павлодар) 67, 68, 72, 73; *М. Колодин* (Ленинград) 66, 67, 73; *Д. Коломиец* (Москва) 66, 69, 70; *Ю. Кондратенко* (Киев) 73, 76, 78; *К. Копотук* (Киев) 66, 68—70, 72—76, 80; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 69, 73; *С. Котов* (Первоуральск) 68; *Ю. Кочетков* (Винница) 67—70; *Н. Крылов* (Ленинград) 73; *О. Крылов* (п. Синегорье Магаданской обл.) 67, 69; *Д. Кузин* (Пенза) 73; *В. Кузнецов* (Киев) 73; *В. Кузнецов* (Пенза) 67, 69; *Н. Курило* (с. Ольховатка Харьковской обл.) 68, 76, 79; *М. Куриной* (Харьков) 66—70, 72, 73, 78, 79; *В. Кутищев* (Магадан) 67, 69, 72; *Н. Кушлевич* (Москва) 67, 69, 73, 78; *С. Кярас* (Молетай) 66—70, 72, 73, 75, 76, 78; *С. Лаусмаа* (Коктляярве) 67, 73; *М. Ледней* (с. Лопушное Закарпатской обл.) 76; *Л. Леняшин* (Ленинград) 67, 73, 76, 79; *П. Линник* (ст. Анапская Краснодарского кр.) 73; *А. Липай* (Минск) 66, 67, 73, 78; *В. Литовченко* (Киев) 72, 73; *В. Любарский* (Киев) 76; *Е. Макаров* (Серпухов) 69, 73; *И. Макаров* (Новокузнецк) 73; *М. Макаров* (Севастополь) 67—70, 72—75, 77; *А. Максимов* (Ташкент) 72; *Ю. Махлин* (Москва) 66, 67, 69, 70, 73, 74; *В. Мацкин* (Ленинград) 67; *А. Мельниченко* (Киев) 76; *С. Минаев* (Свердловск) 66—68, 70, 73, 76; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 66—70, 72—76, 78, 80; *Е. Мишин* (Севастополь) 67—70, 72, 73, 75; *Д. Молалецкий* (Ленинград) 73; *П. Молодчик* (Киев) 67; *А. Молотков* (Ленинград) 67—69, 73, 77; *В. Морозов* (Пушино) 67, 69, 73; *М. Мунькин* (Алма-Ата) 69, 72, 73; *И. Наншир* (Улан-Батор, МНР) 76; *О. Никифорчик* (Ивано-Франковск) 73; *Ф. Нюсс* (Страсбург, Франция) 69; *М. Ободовский* (Москва) 69, 73, 76; *О. Овецкая* (Донецк) 66, 67, 69, 72, 73, 75; *Л. Оляха* (Свердловск) 69, 73; *Б. Панич* (Севастополь) 72, 73, 75; *А. Панькин* (Киев) 67, 68; *Е. Патрушев* (Нижний Тагил) 73; *С. Пунихин* (Москва) 67—70, 73, 77; *В. Погребняк* (Винница) 66—70, 73; *М. Померанцев* (Черкассy) 66, 67; *В. Порошин* (Ленинград) 66—69, 76, 77; *А. Приходько* (Днепропетровск) 73; *И. Путилин* (Рязань) 73; *И. Пухов* (Москва) 69; *С. Пяртли* (Иваново) 67; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 66—70, 72, 73, 75—77, 79, 80; *А. Расийски* (Кюстендил, НРБ) 69; *Е. Растигеев* (Барнаул) 66—68; *Д. Розман* (Севастополь) 67—70, 72, 73, 75; *А. Ройтерштейн* (Пушкин) 73; *Е. Романов* (Дмитровград) 66—69, 73, 76—78; *А. Ростов* (Винница) 69, 72, 73, 76, 78; *С. Русева* (Сливен, НРБ) 76, 78—80; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 66, 73, 78; *И. Самовол* (Гайворон) 66, 67, 69, 70, 73—76, 78—80; *С. Седова* (Москва) 68, 69, 73; *К. Семенов* (Киев) 66, 67, 72—76, 78—80; *Р. Сибилёв* (Ленинград) 73, 76—80; *В. Сизый* (Киев) 72—76, 78—80; *М. Соколова* (Ленинград) 69, 76, 77; *Г. Спивак* (Киев) 66, 68, 76, 78; *С. Старцев* (Уфа) 66—68, 70, 73, 76, 77; *С. Стаевич* (Брест) 73; *И. Стругошицков* (Киев) 76, 78; *В. Судаков* (Тбилиси) 66, 69, 72, 73, 75—80; *Р. Суник* (Киев) 76, 78; *И. Сысоева* (Балашиха) 69; *В. Таргаковский* (Киев) 72, 73, 75; *М. Тейтель* (Киев) 66—70, 72, 73, 75, 76, 80; *Д. Толпин* (Электросталь) 67, 69; *Ю. Томилов* (Винница) 73, 75—79; *Е. Тополож* (Пенза) 73; *С. Торшин* (Магнитогорск) 73; *А. Трухан* (Минск) 66, 67, 72, 76; *В. Тульчинский* (Киев) 66—69, 72—74, 76, 78; *Е. и Т. Уклистые* (Астрахань)

66, 68, 73, 76; *Н. Устинов* (Калининград) 66—69, 75, 77; *Н. Федин* (Омск) 68, 69, 72, 76, 78, 79; *Р. Федосов* (Киев) 73, 76; *Е. Финк* (Ленинград) 66—69, 72, 73, 75; *Д. Финоженов* (Магадан) 69; *И. ван дер Флинт* (Ленинград) 66, 69, 72, 73, 75; *М. Хованов* (Москва) 66, 67, 69; *С. Хосид* (Алма-Ата) 69; *Е. Хотькова* (Наро-Фоминск) 73; *А. Цирс* (Апатиты) 78; *Т. Чабановский* (Киев) 73; *Е. Чебукова* (Киев) 73; *А. Череватый* (Киев) 67—69, 72—80; *Е. Черная* (Днепродзержинск) 66, 67, 73; *М. Черномысов* (п/о Никольское Ленинградской обл.) 76; *Г. Шаглеев* (Севастополь) 68, 70, 72, 73, 75; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 66, 67, 69, 73, 77; *А. Шаповал* (Киев) 73, 76, 78, 80; *О. Шаров* (Киев) 66, 67, 69; *С. Шейник* (Молодечно) 66, 67, 69, 73, 75, 77; *А. Шишкин* (Калинин) 69; *Г. Шпитальник* (Ленинград) 73; *Б. Шраер* (Ленинград) 73, 76, 77; *Г. Шушлин* (Киев) 76; *В. Шульга* (Евпатория) 72, 73, 75, 76; *М. Шульгина* (Фатеж) 66, 67, 70; *Г. Шушлин* (Киев) 72, 75; *В. Щепинов* (Севастополь) 68, 69; *Е. Юдицкий* (Киев) 66, 68, 76—78; *Е. Якуб* (Бахчисарай) 66, 67, 69.

Физика

О. Авраменко (Херсон) 79, 82, 85, 86, 89, 91, 92; *В. Антипенко* (Киев) 82; *В. Апальков* (Харьков) 82, 84, 85, 88, 89, 91, 92; *М. Апрелько* (Киев) 85; *А. Байрамов* (Баку) 92; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 82—86, 88, 91, 92; *Н. Барский* (Донецк) 82; *К. Баталин* (Нижний Тагил) 91; *Г. Батрак* (Киев) 88; *Б. Баяраа* (Улан-Батор, МНР) 86; *Э. Бондаренко* (Полтава) 82—86, 88, 91; *Ю. Боровский* (Киев) 83, 85, 88, 89; *Р. Богашев* (Фрунзе) 82, 85, 91; *Т. Брейтус* (Москва) 82; *Е. Байнштейн* (Ташкент) 88; *О. Васильев* (Алма-Ата) 82, 85, 88, 91; *В. Викторов* (п. Чимишлия Молд. ССР) 88; *А. Вороняк* (Киев) 83, 85, 88; *Н. Гаверик* (Часов Яр) 82, 85, 86, 88, 91, 92; *В. Гай* (Киев) 82; *К. Галочкин* (Ташкент) 85; *В. Галухин* (Рязань) 82—86, 89, 91; *Е. Генчихмакер* (Киев) 91; *А. Глухов* (Саратов) 82, 85, 88, 91; *М. Гогман* (Киев) 82, 85, 91, 92; *В. Гришпун* (Караганда) 82, 85; *В. Гусев* (Красноярск) 82, 84—86, 91; *Ю. Дейкало* (Киев) 85; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 82, 85, 88, 91; *П. Дробышев* (Киев) 82, 85, 89, 91; *С. Дубовик* (Брест) 82, 84, 85, 89; *С. Дудко* (Донецк) 84—86; *А. Еренбург* (Запорожье) 82, 84—86; *С. Ерлыков* (Ленинград) 89; *М. Замкович* (Брест) 82; *А. Иванов* (Петрозаводск) 82; *А. Карнауков* (Устинов) 82, 85, 86; *Д. Кашпер* (Киев) 91; *Т. Квитковский* (Быдгощ, ПНР) 82; *Р. Керимбеков* (Орджоникидзе) 82; *В. Киреев* (Киев) 87; *П. Клишкин* (Киев) 88, 91; *А. Климачев* (Минск) 82—84, 86, 88, 89, 91; *Г. Климович* (п. Болшево Московской обл.) 82—89, 91, 92; *В. Князницкий* (Пружаны) 85, 87—89; *С. Комечко* (Брест) 86; *Ю. Кондратенко* (Киев) 91; *В. Костенко* (Киев) 88, 91; *С. Котов* (Первоуральск) 81, 82, 85; *М. Кудряшев* (Москва) 84—88, 91; *М. Кудряцев* (Стаханов) 86; *В. Кузнецов* (Киев) 85; *Н. Курило* (с. Ольховатка Харьковской обл.) 86; *В. Кусков* (п. Красный Октябрь Владимирской обл.) 83—85; *Д. Кучулориа* (Тбилиси) 84, 88, 89; *Ю. Литвищенко* (Воронеж) 85; *Ю. Лобзаков* (Киев) 82, 85; *К. Лопин* (Фрунзе) 91; *Д. Луниц* (Саратов) 83—86, 88, 91, 92; *П. Лушников* (Москва) 84—88, 91; *О. Мазяр* (Львов) 85, 86, 88, 91; *К. Макачук* (Киев) 84—86; *А. Максимов* (Ташкент) 84, 85; *А. Мастыкин* (Минск) 91; *Ю. Махлин* (Москва)

82, 86; *С. Машкевич* (Киев) 82—86, 88, 91; *В. Меньков* (Мончегорск) 79, 82—85, 87—89, 91, 92; *А. Микалькявичус* (Паневежис) 82, 85, 87—89, 91, 92; *С. Минаев* (Свердловск) 82; *А. Михеев* (Москва) 82, 85, 91; *О. Мороз* (Алма-Ата) 82, 85, 86, 88, 91; *К. Мосейчев* (Зеленоград) 82, 85; *А. Муравьева* (Брест) 82; *С. Мягчилов* (Одесса) 82—85, 88, 89, 91, 92; *С. Настенко* (Киев) 82; *А. Никитин* (Киев) 82; *С. Никитенко* (Киев) 82, 84—87; *С. Никоненко* (Киев) 88, 91, 92; *А. Онуфриев* (Москва) 82, 85, 86, 91; *О. Осауленко* (Киев) 83, 85, 88, 89; *Р. Паламарчук* (Нежин) 85, 91; *Б. Парканский* (Кишинев) 84—86, 89, 91, 92; *Д. Пастухов* (Витебск) 82, 83, 85, 86, 92; *А. Перепелицкий* (Владимир-Волынский) 82, 84—86, 88, 91; *И. Пильников* (Тамбов) 82, 84—86; *С. Пиунхин* (Москва) 82, 85, 88; *М. Померанцев* (Черкасы) 82; *О. Посудневский* (Москва) 85; *Ю. Прахович* (Москва) 82; *В. Прибытков* (Находка) 82; *А. Приходовский* (Береза) 79, 82; *А. Прохоров* (Херсон) 91; *Я. Пугай* (Алма-Ата) 82—85, 89, 91; *В. Рай* (с. Марфовка Крымской обл.) 85, 86; *С. Рахамов* (Казань) 82—89, 91, 92; *А. Ржевский* (Новосибирск) 82, 85, 86, 88, 89, 91; *Р. Ривкин* (Минск) 79, 82, 88; *Н. Ромец* (Кировград) 88, 89; *В. Руднев* (Целиноград) 82, 85, 86; *М. Рудык* (Винница) 82, 85, 86, 88; *Ю. Рыбалочко* (Киев) 82, 83, 85, 86, 88, 91; *Л. Рывчин* (Киев) 85, 86, 91; *М. Савченко* (Белгород) 82, 84—86, 92; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 88; *Б. Самойлов* (Киев) 83—85, 88; *И. Серикбаев* (с. Чилик Алма-Атинской обл.) 82; *М. Skorobogatov* (Киев) 78—92; *С. Собесский* (Красноармейск Кокчетавской обл.) 82, 87; *А. Сомов* (Киев) 79, 82, 85, 86, 88; *Г. Спивак* (Киев) 82, 91; *С. Степаняц* (Ереван) 84; *И. Стрешинский* (Киев) 85, 86, 88, 91; *И. Струговицков* (Киев) 79, 82, 85, 86, 91; *Б. Сулейманов* (Баку) 92; *Д. Таджикиева* (Учкурган) 82; *В. Таргаковский* (Киев) 82, 84—86, 89, 91, 92; *И. Терез* (Симферополь) 82, 84—89, 91, 92; *А. Тихомиров* (Чимкент) 82; *С. Тужанский* (Винница) 82, 85, 86, 88; *А. Умног* (Мнасс) 82, 88, 91; *Л. Федичкин* (Москва) 82, 85, 86, 88, 91; *Н. Федин* (Омск) 82, 84—89, 92; *Л. Фельдман* (Саратов) 82—92; *С. Феранчук* (Минск) 82, 84—86, 88, 91; *А. Фокин* (Москва) 82; *В. Фурман* (Ташкент) 79, 82, 83, 85—89, 91; *А. Цирс* (Апатиты) 89, 92; *Т. Чабановский* (Киев) 85; *О. Черченко* (п. Куляск-Узловой Харьковской обл.) 82, 88; *С. Чернышов* (Ташкент) 82, 85; *А. Шаповал* (Киев) 85; *А. Швед* (с. Раздольное Амурской обл.) 91; *Г. Швец* (Киев) 88; *А. Щеголев* (п. Черноголовка Московской обл.) 82, 84—86, 88, 89, 91; *А. Щербаков* (Москва) 82; *О. Яковлев* (Иркутск) 79, 91, 92.

Поправка

В «Кванте» № 2 этого года на с. 32 в условии задачи 1 вместо слов «... в этом году» следует читать «в 1865 году».



Сколько корней имеет уравнение?

И. Г. ГАБОВИЧ,
И. И. ГОРНИШТЕИН

На вступительных экзаменах в вузы нередко предлагаются примеры, в которых требуется определить, сколько корней имеет то или иное данное уравнение. Заметим, что в этих примерах требуется чаще всего найти лишь число корней, а не сами корни.

Более сложным является аналогичный вопрос в отношении уравнения, содержащего параметр. В этом случае предлагается определить, при каком значении параметра данное уравнение имеет один, два или другое конечное число корней.

Решению таких примеров посвящена данная статья.

Пример 1 (КГУ, мехмат, 1981). Сколько корней имеет уравнение $x^2 - 2x - \log_2 |x-1| = 3$? (1)

Решение. Перепишем уравнение (1) в виде

$$x^2 - 2x - 3 = \log_2 |x-1|. \quad (2)$$

Ясно, что (2) \Leftrightarrow (1). Заметим, также, что знак выражения, стоящего под знаком абсолютной величины, можно изменить на противоположный.

Число корней уравнения (2) равно числу точек пересечения графиков

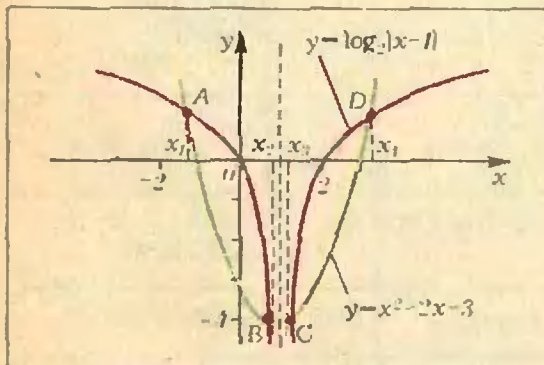


Рис. 1.

функций, являющихся левой и правой частями уравнения (2). Графики этих функций (рис. 1) пересекаются в четырех точках (A, B, C и D). Следовательно, уравнение (2), а значит и эквивалентное ему уравнение (1), имеет четыре корня (равные абсциссам точек пересечения).

Пример 2 (МГУ, ВМК, 1980). При каких значениях параметра а уравнение

$$(a+1)x^2 - ax + (a-3) = 0 \quad (3)$$

имеет не более одного действительного корня?

Решение. 1) Пусть $a \neq -1$. Тогда уравнение (3) квадратное и имеет не более одного действительного корня, если $D \leq 0$, то есть

$$\begin{aligned} a^2 - 4(a+1)(a-3) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3a^2 - 8a - 12 \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Квадратный трехчлен $3a^2 - 8a - 12$ имеет корни: $a_1 = (4 - 2\sqrt{13})/3$ и $a_2 = (4 + 2\sqrt{13})/3$. Ясно, что $a_2 > -1$. Покажем, что $a_1 < -1$:

$$\begin{aligned} -1 - (4 - 2\sqrt{13})/3 &= (2\sqrt{13} - 7)/3 = \\ &= (\sqrt{52} - 7)/3 > 0; \end{aligned}$$

это и означает, что $a_1 < -1$.

Следовательно, решением (4) будет объединение промежутков:

$$\begin{aligned} &]-\infty; (4 - 2\sqrt{13})/3[\cup \\ &\cup [(4 + 2\sqrt{13})/3; \infty[. \end{aligned}$$

2) При $a = -1$ уравнение (3) обращается в уравнение первой степени: $x - 4 = 0$, имеющее один действительный корень.

Таким образом, получаем следующий ответ:

$$\begin{aligned} a \in &]-\infty; (4 - 2\sqrt{13})/3[\cup \\ &\cup \{-1\} \cup [(4 + 2\sqrt{13})/3; \infty[. \end{aligned}$$

Пример 3 (МИЭМ, 1982). Решить уравнение

$$|2x+2| = ax^2 + 4 \quad (5)$$

и определить значения а, при которых оно имеет единственное решение.

Решение. Уравнение (5) эквивалентно совокупности двух смешанных систем:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x < -1; \\ -2x - 2 = \\ = ax^2 + 4; \end{cases} \\ &\begin{cases} x \geq -1; \\ 2x + 2 = \\ = ax^2 + 4; \end{cases} \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x < -1; \\ ax^2 + 2x + \\ + 6 = 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} x \geq -1; \\ ax^2 - 2x + \\ + 2 = 0. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

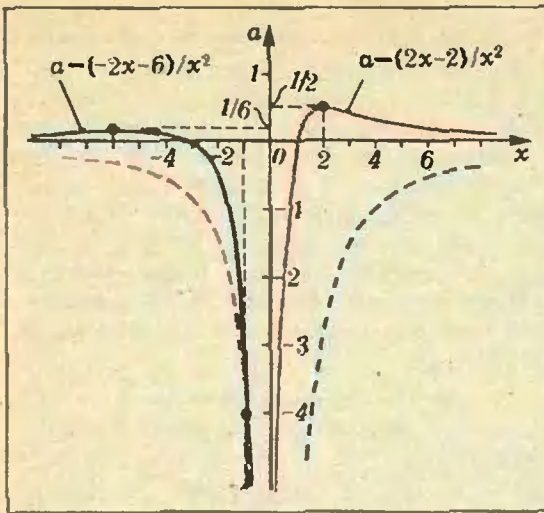


Рис. 2.

Учитывая, что $x \neq 0$, получаем зависимость $a = f(x)$, имеющую на каждом из рассматриваемых промежутков разные аналитические выражения:

$$a = (-2x - 6)/x^2 = f_1(x) \text{ при } x < -1 \text{ и} \\ a = (2x - 2)/x^2 = f_2(x) \text{ при } x \geq -1.$$

Построим график этой зависимости в системе координат xOa (рис. 2). Графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются «сплошные» синяя и красная кривые соответственно. Объединение этих линий является графиком зависимости $a = f(x)$. (Пунктирные синяя и красная кривые есть графики зависимостей $f_1(x)$ и $f_2(x)$ вне промежутков, на которых они рассматриваются. Эти пунктирные линии понадобятся ниже при отборе решений.) Синяя и красная кривые пересекаются в точке с координатами $(-1; -4)$.

Исследование функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ показывает (что видно также и на рисунке 2), что $\max_{x \in (-\infty; -1]} f_1(x) = f_1(-6) = \frac{1}{6}$, а $\max_{x \in [-1; \infty]} f_2(x) = f_2(2) = \frac{1}{2}$.

Абсциссы точек, в которых прямая, параллельная оси Ox , пересекает сплошные линии, являются решениями уравнения (5).

Из приведенного рисунка и сделанных выше замечаний следует, что уравнение (5) имеет:

а) При $a \in]-\infty; -4]$ — два решения: $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 2a})/a$, определяемые из уравнения

$$ax^2 - 2x + 2 = 0. \quad (6)$$

б) При $a \in]-4; 0[$ — два решения: $x_1 = (-1 + \sqrt{1 - 6a})/a$ и $x_2 = (1 -$

$$-\sqrt{1 - 2a})/a.$$

Объясним, как отбираются эти корни. Решая уравнение

$$ax^2 + 2x + 6 = 0, \quad (7)$$

мы получаем два корня: $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 - 6a})/a$. При рассматриваемых значениях a оба корня действительны и меньшим будет корень $x_1 = (-1 + \sqrt{1 - 6a})/a$. Он и является решением уравнения (5). Большой же корень $x_2 = (-1 - \sqrt{1 - 6a})/a$ будет посторонним. Это объясняется тем, что упомянутая выше прямая, параллельная оси Ox , при рассматриваемых значениях a дважды пересекает синюю линию: один раз — ее сплошную ветвь, другой — пунктирную. Корнем же уравнения (5) будет абсцисса точки, принадлежащей сплошной ветви. Аналогично находится второй корень.

в) При $a = 0$ — два решения: $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$, определяемые из уравнений (7) и (6) соответственно.

г) При $a \in]0; 1/6[$ — четыре решения. Два из них находятся из уравнения (6), а два других — из

Таблица

Значения a	Число решений	Решения
$a \in]-\infty; -4]$	два	$x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 2a})/a$
$a \in]-4; 0[$	два	$x_1 = (-1 + \sqrt{1 - 6a})/a;$ $x_2 = (1 - \sqrt{1 - 2a})/a$
$a = 0$	два	$x_1 = -3$ и $x_2 = 1$
$a \in]0; 1/6[$	четыре	$x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 - 6a})/a;$ $x_{3,4} = (1 \pm \sqrt{1 - 2a})/a$
$a = 1/6$	три	$x_1 = -6;$ $x_{2,3} = 6 \pm 2\sqrt{6}$
$a \in]1/6; 1/2[$	два	$x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 2a})/a$
$a = 1/2$	одно	$x = 2$
$a \in]1/2; \infty[$	0	—

уравнения (7):

$$x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1-6a})/a;$$

$$x_{3,4} = (1 \pm \sqrt{1-2a})/a.$$

д) При $a=1/6$ — три решения: $x_1 = -6$ и $x_{2,3} = 6 \pm 2\sqrt{6}$.

е) При $a \in]1/6; 1/2[$ — два решения: $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1-2a})/a$.

ж) При $a=1/2$ — единственный корень $x=2$.

з) При $a \in]\frac{1}{2}; \infty[$ уравнение (5) действительных корней не имеет.

Выпишем теперь все решения уравнения (5) в таблицу, идя по «спектру» значений a . Эта таблица и будет ответом для данного примера.

Пример 4 (ЛГУ, матмех, 1980). При каких действительных a уравнение

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + a = \cos 2x \quad (8)$$

имеет более одного корня на отрезке $[\pi/8; 3\pi/8]$?

Решение. Преобразовав в уравнении (8) произведение $\cos x \cdot \cos 3x$ в сумму, получаем

$$\frac{1}{2} \cos 2x (\cos 2x + \cos 4x) + a = \cos 2x \Leftrightarrow 2a = -2\cos^3 2x - \cos^2 2x + 3\cos 2x.$$

Положим $\cos 2x = z$; тогда если x возрастает от $\pi/8$ до $3\pi/8$, то z убывает от $\sqrt{2}/2$ до $-\sqrt{2}/2$. Таким образом, требуется определить, при каких значениях a уравнение

$$2a = -2z^3 - z^2 + 3z \quad (9)$$

имеет более одного корня на отрезке $[-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]$. Для решения этой задачи построим график функции $f(z) = -2z^3 - z^2 + 3z$. Из уравнения $f'(z) = 0 \Leftrightarrow 6z^2 + 2z - 3 = 0$ находим критические точки функции f :

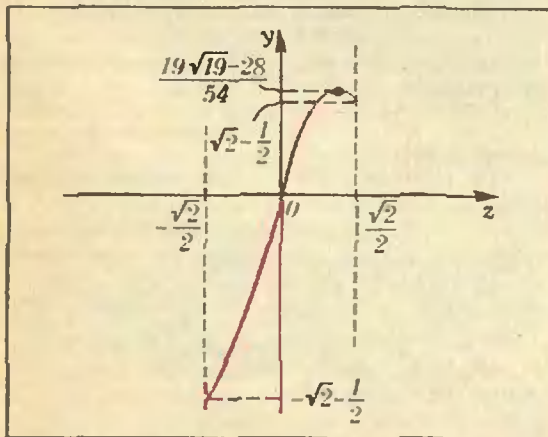


Рис. 3.

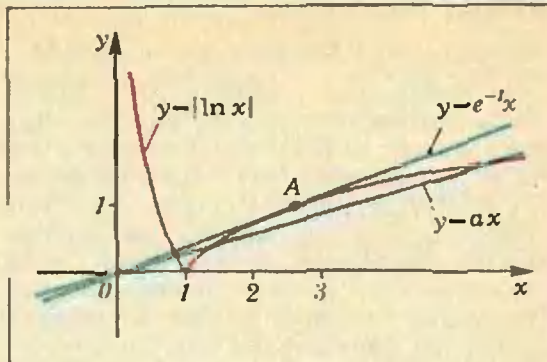


Рис. 4.

$$z_1 = (-1 - \sqrt{19})/6; \quad z_2 = (-1 + \sqrt{19})/6.$$

Легко проверить, что $z_1 \notin [-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]$, $z_2 \in [-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]$, z_2 — точка максимума, $\max_{[-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]} f = f(z_2) = (19\sqrt{19} - 28)/54$. Кроме того, $f(-\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2} - \frac{1}{2}$; $f(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Из графика видно (рис. 3), что при $z \in [-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]$ функция $f(z)$ каждое свое значение на промежутке $[\sqrt{2} - 1/2; (19\sqrt{19} - 28)/54[$ принимает два раза, а остальные — один раз.

Учитывая, что $f(z)$ — это $2a$, получаем

$$\text{Ответ: } [(2\sqrt{2} - 1)/4; (19\sqrt{19} - 28)/108[.$$

Пример 5 (КГУ, ф-т кибернетики, 1981). При каких значениях a уравнение

$$|\ln x| - ax = 0 \quad (10)$$

имеет три корня?

Решение. Перепишем уравнение (10) в виде $|\ln x| = ax$. (11)

Рассмотрим функции $f(x) = |\ln x|$ и $g_a(x) = ax$ и построим их графики (рис. 4). Графиком функции $g_a(x)$ является прямая, проходящая через начало координат и образующая с положительным направлением оси абсцисс угол, определяемый параметром a .

Ясно, что при $a < 0$ прямая $y = ax$ не пересекает графика функции $f(x)$ — уравнение (11), а значит, и уравнение (10), решений не имеет. При $a = 0$ уравнение (11) имеет единственный корень: $x = 1$. При $a > 0$, но не превышающем некоторого значения a_m , при котором прямая $y = ax$ касается ветви кривой $f(x)$, соответствующей промежутку

] 1 ; ∞ [, то есть при

$$0 < a < a_m, \quad (12)$$

уравнение (11) имеет три корня. Это обуславливается тем, что при указанных в (12) значениях a прямая $y=ax$ пересекает график функции $f(x)$ в трех точках: в одной точке — ветвь кривой на промежутке] 0 ; 1 [и в двух точках — на промежутке] 1 ; ∞ [. Абсциссы этих точек и будут корнями уравнения (11).

Может показаться, что при малых положительных a прямая $y=ax$ пересечет ветвь графика функции $f(x)$ на промежутке] 1 ; ∞ [только в одной точке, абсцисса которой близка к единице. Но такое мнение ошибочно. Известно, что степенная функция при возрастании x растет быстрее логарифмической (*Алгебра и начала анализа 9—10* 1980, п. 70, с. 214). Поэтому при любом $a > 0$ и как угодно малом по абсолютной величине прямая $y=ax$ два раза пересечет ветвь $f(x)$, соответствующую промежутку] 1 ; ∞ [.

Определим теперь, при каком значении a прямая $y=ax$ касается упомянутой ветви.

Пусть $A(x_0, y_0)$ — точка касания. Тогда искомое значение a находим из системы

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ln x_0 = ax_0, \\ \frac{1}{x_0} = a, \end{cases}$$

откуда $x_0 = 1/a$; $\ln(1/a) = 1 \Rightarrow a = e^{-1}$.

Итак, $a_m = e^{-1}$. Следовательно, при $a \in]0; e^{-1}[$ уравнение (10) имеет три корня.

Рассмотренные в статье примеры различны по содержанию. В решении одних мы пользовались, наглядности ради, графиками, другие же решались только аналитически.

Вместе с тем, ознакомившись с приведенными решениями, вы приобрели некоторые навыки, которые сумеете применить в решении других аналогичных примеров и, в частности, приведенных в упражнениях.

Упражнения

1 (МГУ, химфак, 1982). При каких значениях параметра p уравнение

$$(x-p)^2 \cdot [p(x-p)^2 - p - 1] = -1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

2 (ЛГУ, матмех, 1979). Сколько корней имеет уравнение

$$(x+2)e^{-x^2} - x^4/6 - x^3/20 = x^2 + 1?$$

3 (НГУ, мехмат, 1977). Определить, при каких значениях a уравнение $\log_{2x}(ax+1) = -1/2$ имеет единственное решение.

4 (ЛГУ, матмех, 1980). При каких действительных a уравнение

$$\sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = a$$

имеет ровно два корня на отрезке $[\pi/4; \pi/2]$?

5 (МГУ, ВМК, 1980). При каких значениях параметра a уравнение

$$(3a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$$

имеет два действительных корня?

6 (МГУ, мехмат, 1980). При каких значениях a уравнение

$$4^{-|x-1|} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2 + 2x} \times \\ \times \log_{1/3}(2|x-a| + 2) = 0$$

имеет ровно три различных корня?

7 (МГУ, общая геология, 1979). Найти все значения a , при которых уравнение

$$x^2 + 6x/\sqrt{\sin a} + 9\sqrt{3}/\cos a + 36 = 0$$

имеет единственное решение.

8 (УрГУ, матмех, 1981). При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_{\frac{a}{a-6}}(2x^2 - 3x + 2) = 2\log_{ax-6}(x^2 + 2x - 4)$$

имеет единственное решение?

9 (МГУ, химфак, 1980). Найти все такие значения k , для каждого из которых число решений относительно x уравнения

$$2x^3 + 6x = (3^{6k} - 9)\sqrt{2^{2k} - 1}/6 - (3k - 1)^2 \cdot 12^x$$

не меньше числа решений относительно y уравнения

$$3(5y^2 - k^4) - 2y = 2k^2(6y - 1).$$

10 (МИФИ, 1980). Найти значение c , при которых уравнение

$$2\log_7(cx - 2) = \log_7(-x^2 - 9x - 18)$$

имеет только одно решение.

11 (МИЭМ, 1980). Найти при $a=1$ все решения уравнения

$$\sin(2(x-\pi)) - \sin(3x-\pi) = a \sin x,$$

расположенные на отрезке $[0; \pi/2]$, и выяснить, при каких a данное уравнение имеет единственное решение на этом отрезке.

12 (ЛЭТИ, 1982). Дана функция $y=f(x)$, где

$$f(x) = x^2 + x + 9/(x^2 + x + 1).$$

При каких a уравнение $f(x)=a$ имеет 4 корня?

13 (ЛЭТИ, 1982). Сколько корней имеет уравнение

$$\log_3 \sin x = x^2 - 36?$$

14 (ЛЭТИ, 1982). При каких значениях a уравнение

$$\sqrt{x+a} = x$$

имеет 2 корня?

15 (МИСиС, 1983). При каком a уравнение

$$|x+2| - |2x+8| = a^x$$

имеет единственное решение?

16 (МИСиС, 1983). При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$ имеет больше трех решений?

17 (МГУ, ВМК, 1983). При всех a решите уравнение

$$(x+2)(x+4) + 5(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}} = (a+2)(a-3).$$



Латвийские открытые олимпиады и летняя школа «Альфа»

В Латвийской ССР практикуются разные формы работы со школьниками: система кружков, как школьных, так и работающих при вузах республики и станциях юных техников, малые университеты, семинары, проводимые Латвийским государственным университетом им. П. Стучки для учащихся выпускных классов, производственная практика в лабораториях НИИ и вузов, ежегодная неделя науки и техники для юношества, республиканские олимпиады, республиканские открытые олимпиады, летние школы-семинары для победителей республиканских олимпиад «АЛЬФА» и другие.

В этой заметке рассказывается об открытых олимпиадах и летней школе «АЛЬФА».

Слово «открытые» подчеркивает главное отличие этих олимпиад от обычных республиканских. Последние проходят в несколько этапов (школьный, районный или городской, финал), в следующий этап выходят победители предыдущего, а в финал выходят 100 школьников. Это очень мало. В республике действует целый ряд школ физико-математического направления или с углубленным изучением радиоэлектроники и основ программирования, в которых обучение ведется с повышенными требованиями по физике и математике. В этих школах учится много хорошо подготовленных ребят, достойных участия в финале республиканской олимпиады. Однако многие из них оставались в роли наблюдателей, так как общее количество участников и лимиты представительства от районов и школ налагали свои ограничения. Школьник мог остаться «за чертой» и по причине случайного «творческого срыва» или болезни во время одного из предварительных этапов.

Чем же открытые олимпиады отличаются от обычных?

Во-первых, в них не существует никаких ограничений на представительство — могут участвовать все желающие, выславшие заранее письмом или на обычной открытке заявку (она необходима лишь для того, чтобы можно было лучше планировать размещение разных групп участников по аудиториям).

Второй особенностью открытых олимпиад является то, что они одноступенчатые, то есть не имеют предварительных этапов отбора и проводятся в один день.

Это открывает путь для соревнования со своими сверстниками на «высшем уровне» многим ребятам, которые не попадали в финальный тур традиционных олимпиад главным образом из-за количественных ограничений.

Математики проводят открытые олимпиады с 1972 года, ныне в них принимают участие более 1000 школьников 4—10-х (11-х) классов. Первая открытая олимпиада по физике состоялась в 1976 году, в этом году будет юбилейная — десятая. На олимпиаду приезжают ученики 8—10-х классов школ с русским языком обучения и 9—11-х классов — с латышским языком обучения, а также учащиеся ПТУ и техникумов, всего порядка 400 человек.

Открытые олимпиады проводятся ежегодно в одно из воскресений апреля. Они начинаются в 10 часов 30 минут, на выполнение работы отводится 4,5 часа «чистого» времени. Начало работы и предоставленное время выбраны с таким расчетом, чтобы ребята на олимпиаду могли прибыть практически со всей республики и успели вечером вернуться домой.

На открытых олимпиадах по физике обычно предлагаются 6 задач, как аналитических, так и качественных.

Некоторую особенность по сравнению с традиционными олимпиадами имеют экспериментальные задачи. Из-за большого количества участников невозможно подготовить индивидуально выполняемые экспериментальные задачи. Поэтому участникам олимпиады демонстрируется какой-либо опыт или явление и требуется дать его описание и объяснение. Как правило, участникам олимпиады предоставляется возможность самостоятельно повторить опыт.

Олимпиадные задачи подбираются так, чтобы они в меру возможности отражали традиционные для республики направления физики.

По окончании работы проводится разбор задач, на котором участники олимпиад знакомятся с правильными решениями. Участники из отдаленных от Риги школ, не имеющие возможности остаться на разбор, а также учителя и все желающие могут ознакомиться с задачами открытых олимпиад и их решениями по сборнику статей Астрофизической обсерватории АН Латвийской ССР «Звездное небо».

Многократным председателем оргкомитета и жюри открытой олимпиады по физике является член-корреспондент АН Латвийской ССР профессор К. К. Шварц, в состав жюри входят сотрудники Латвийского государственного университета, Института физики и других НИИ республики. Жюри определяет победителей, которые получают персональные приглашения на День награждения. Этот день заканчивается экскурсией в лабораторию Института физики. Список призеров олимпиады публикуется в республиканской печати, призеры награждаются соответствующими дипломами и ценными памятными подарками.

Группа призеров открытых олимпиад, кроме того, приглашается в летние школы-семинары победителей республиканских олимпиад с символическим названием «Альфа». Первая буква греческого алфавита символизирует первые шаги участников школы на пути серьезного знакомства с наукой.

Школы-семинары «Альфа» в Латвии проводятся с 1968 года во время летних каникул — обычно в июле. На протяжении 26 дней участ-

ники школы под руководством своих наставников (научных сотрудников НИИ и преподавателей вузов) усиленно занимаются интересующими их вопросами, решают задачи. Среди лекторов — молодые специалисты, недавно окончившие вузы (многие из них — бывшие участники «Альфы»), и уважаемые профессора. У ребят гостили члены корреспонденты АН Латвийской ССР Я. Я. Лиелпетер и К. К. Шварц, профессора К. А. Штейн и И. К. Витол. В «Альфе-84» был Герой Социалистического Труда академик АН СССР А. Ю. Ишлинский, прочитавший ребятам лекцию. В «Альфе» работают 4 секции: физики, математики, химико-биологическая и гуманитарных наук. Секция физики обычно насчитывает 20—25 слушателей. Занятия ведутся в режиме, приближенном к вузовскому — ежедневно читаются 2 полуторачасовые лекции. Кроме них проводятся лабораторные и практические занятия, семинары. Частыми бывают межсекционные и факультативные лекции.

Из лекционной тематики следует отметить вопросы, вызывающие всегда повышенный интерес — основы теории относительности, введение в квантовую механику, проблемы современной астрофизики, а также направления, традиционные для республики: разные доступные вопросы гидро- и магнитогидродинамики.

Лабораторную аппаратуру для «Альфы» предоставляет Институт физики АН Латвийской ССР, Институт физики твердого тела и лаборатории университета. Проводились опыты с лазерами, намагничивающимися жидкостями, измерялись пространственные и вре-

менные вариации естественного радиационного фона при помощи счетчиков Гейгера — Мюллера и другие работы, недоступные школьным лабораториям.

В «Альфа-84» ребята с большим удовольствием в короткий срок освоили программирование на алгоритмическом языке BASIC и потом отработывали его применение при решении разных задач на мини-ЭВМ.

Было бы неправильно думать, что слушатели «Альфы» — это «сухари», по уши погруженные в науку. На досуге для ребят организуются спортивные соревнования, экскурсии и походы по району и в близлежащие города («Альфы», как правило, проводятся в живописнейших местах Латвии на базе одной из периферийных школ). А когда альфовцы организуют карнавал или выступают в КВН или на самодеятельном вечере, то становится ясным, что понятия «физик» и «лирик» не только не исключают, но наоборот — дополняют друг друга.

Завершаются «Альфы» традиционными конференциями, на которых лекторы и слушатели могут задавать друг другу любые, самые разнообразные вопросы — несерьезные, полусерьезные и серьезные. Но всегда на один, адресованный школьникам вопрос: «Хотите ли вы еще раз участвовать в «Альфе»?», следует ответ без колебаний: «Да!».

Член совета молодых ученых
и специалистов ЦК ЛКСМ Латвии
Л. Е. Шмитс

Пинг-понг... в умывальнике

(Начало см. на с. 15)

в результате чего возникают колебания шарика.

Однако реальное движение шарика — не простое перемещение от стенки к стенке через центр. Он движется, прижимаясь к стенке сливного отверстия, при этом точка касания A перемещается по окружности сечения сливного отверстия, а центр шарика O описывает маленькую окружность, изображенную на рисунке 5 штриховой линией. Легко понять, что угловая скорость

вращения шарика $\Omega = \omega \frac{R_{отв} - R}{R_{отв}}$, то

есть она примерно в десять раз меньше ω . Ее нетрудно измерить с помощью секундомера, подсчитывая число оборотов в секунду меток на шарике (примерно 2 — 3 оборота в секунду).

Возникает, наконец, такой вопрос: по или против часовой стрелки вращается шарик? Прежде чем ответить на него, заметим, что центральное положение шарика в сливном отверстии устойчиво. Чтобы убедиться в этом, закройте кран, а шарик прижмите пальцем сверху. Затем осторожно отпустите палец — шарик останется неподвижным. Это означает, что конкретная ситуация зависит от предьстории, и в принципе возможны три случая: если шарик был неподвижным, он и останется неподвижным, если начальный толчок сдвинул точку касания A по часовой стрелке, то шарик будет вращаться против часовой стрелки, и наоборот.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

..И В ПЛУТОВАТОСТИ ПОЧАСТУ УПРАЖНЯЛИСЬ

Иногда слова, напечатанные курсивом, много несправедливее тех, которые напечатаны прямым шрифтом...

Видно, что и в древности немало к писанию склонности имели и в плутоватости почаству упражнялись.

Козьма Прутков

Иные «исторические» материалы уж столько раз опровергались, что само упоминание их расценивается как шутка. Вот и в «Кванте» (№ 9 за 1984 г., с. 30) был напечатан курсивом эпиграф к статье «Закон Архимеда»:

«...фурвин (мешок) сделал, как мяч большой, надул дымом поганым и вонючим, от него сделал петлю, сел в нее, и нечистая сила подняла его выше березы...»

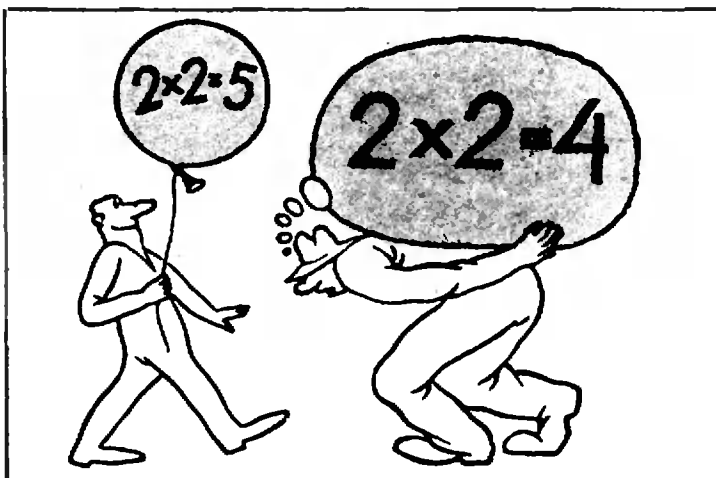
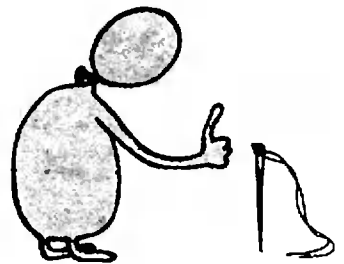
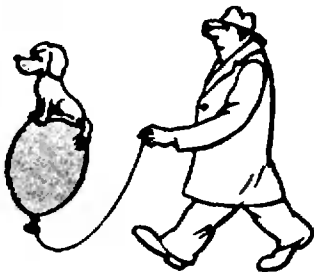
(рассказ о полете подъячего Кракутного в Рязани в 1731 году).

Эти «сведения» были якобы обнаружены «внуком Кракутного» (сплошные кавычки) в начале прошлого века в старинной рукописи. Речь в ней идет о полете на воздушном шаре некоего лица духовного звания, будто бы состоявшемся задолго до полета братьев Монгольфье. Продержавшись более ста лет в ранге правдивого свидетельства, войдя в серьезные издания как факт и даже отразившись на почтовой марке (в 1956 году к «225-летию полета»), эта информация была затем неоднократно опровергнута и в специальных, и в популярных публикациях. Можно рекомендовать, например, такие общедоступные работы, как «История воздухоплавания и авиации в России» (П. Д. Дузь, М.: Просвещение, 1981) или статья «Легенда о велосипеде» (Наука и жизнь, 1983, № 6), в которой рязанский полет упоминается уже вскользь среди других известных легенд.

Поскольку, однако, некоторые читатели «Кванта» восприняли эпиграф всерьез, мы вернулись к этому вопросу.

Заодно отметим, что в разоблачении мистификации важную роль сыграла опять-таки физика: на фотоснимке рукописи в инфракрасных лучах ясно вырисовались буквы, написанные поверх текста позднее!

Редакция использовала этот разговор для того, чтобы попросить художника-карикуриста А. А. Орехова пофантазировать на тему воздушных «фурвинов». Что он и сделал, изрисовав нам всю эту страницу.



Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$1 + \log_6(4 \cos^2 x - \cos x - 1) = \log_6(4 - 7 \cos x).$$

2. Каждый из двух сосудов содержит водный раствор уксусной кислоты. В первом сосуде содержится 15 % кислоты, а во втором — 75 % воды (по объему). Сколько литров каждого раствора нужно взять, чтобы, смешав их, получить 2 л нового раствора, содержащего не более q % кислоты?

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x}{4} + 2} = c + \sqrt{\frac{x}{4} - 3}.$$

4. Высота SO правильной треугольной пирамиды $SPQR$ имеет длину h и составляет с боковым ребром SP угол величиной β . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро PR , если известно, что эта площадь имеет наименьшее возможное значение.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$(x^2 + 13,3x + 44,1) \cdot \sqrt{\log_{0,3}|x+6|} > 0.$$

2. Пункты R и F находятся на реке, впадающей в озеро, а пункты E и Q — на озере. Пути от пунктов E и Q до устья реки (по озеру) пароход преодолевает за p часов и за $p+5$ часов соответственно, а пути от устья реки до пунктов F и R за 11 часов и 13 часов соответственно. С какой скоростью двигался пароход по озеру, если скорости парохода в стоячей воде и реки постоянны, а пути от E до F и от Q до R равны соответственно 105 км и 131 км.

3. Найдите все значения c , при которых система

$$\begin{cases} (\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x+c) = 0, \\ -4 < x < 2 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

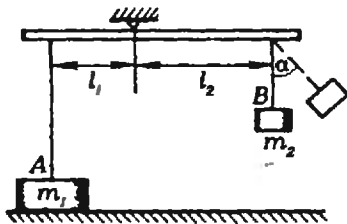


Рис. 1.

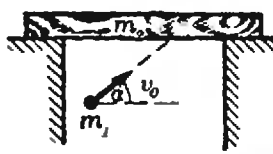


Рис. 2.



Рис. 3.

4. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $PQRTP, Q_1R_1T_1$ радиус окружности, описанной около ее нижнего основания $PQRT$, равен r , и боковая грань составляет с плоскостью $PQRT$ угол величины γ . В квадрат, образовавшийся при пересечении данной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости $PQRT$, вписан круг, являющийся основанием прямого конуса с вершиной в точке пересечения диагоналей квадрата $PQRT$, причём секущая плоскость проведена так, что конус имеет наибольший возможный объем. Определите высоту этого конуса, если $|P_1Q_1| = a$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два тела A и B с массами $m_1 = 1,5$ кг и $m_2 = 0,45$ кг соответственно подвешены на киях к легкому коромыслу, плечи которого имеют длину $l_1 = 0,6$ м и $l_2 = 1$ м, причём тело A лежит на полу (рис. 1). На какой минимальный угол α следует отклонить подвес тела B , чтобы после его отпуска тело A оторвалось от пола?

2. Пуля массой $m_1 = 9$ г, имевшая скорость v_0 ($v_0 = 160$ м/с), направленную под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис. 2), пробивает лежащую на подставках доску массой $m_2 = 0,3$ кг, после чего поднимается на максимальную высоту $H = 45$ м над уровнем подставок. На какую высоту подпрыгнет доска? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Подвешенному на нити шарик сообщили начальную скорость в горизонтальном направлении. Когда нить отклонилась на угол $\alpha = 30^\circ$ от вертикали, ускорение шарика оказалось направленным горизонтально. Найдите угол максимального отклонения нити.

4. Шайба, скользящая по гладкому полу со скоростью $v_0 = 12$ м/с, поднимается на трамплин, верхняя часть которого горизонтальна, и соскакивает с него (рис. 3). При какой высоте трамплина h дальность полета шайбы s будет максимальной? Какова эта дальность?

5. Телу массой $m_1 = 1$ кг, лежащему на длинной горизонтальной доске массой $m_2 = 2$ кг, сообщили начальную скорость $v_0 = 2$ м/с (рис. 4). Какой путь пройдет тело относительно доски, если коэффициент трения между ними $\mu = 0,2$, а трение между доской и плоскостью отсутствует?

6. В закрытом откачанном цилиндре на пружине подвешен скользящий без трения поршень AB , положение равновесия которого находится у дна цилиндра (рис. 5). Под поршень вводится некоторое количество воздуха так, что поршень поднимается на высоту $h_1 = 10$ см при температуре воздуха $t_1 = 27^\circ\text{C}$. На какую

Московский институт стали и сплавов

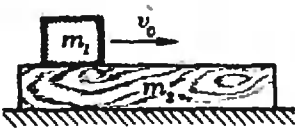


Рис. 4.

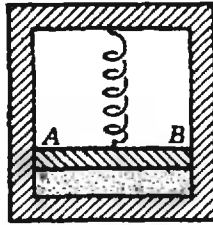


Рис. 5.

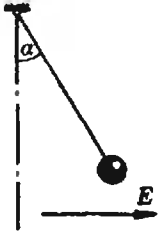


Рис. 6.

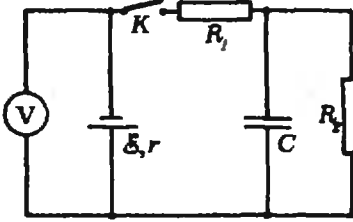


Рис. 7.

высоту поднимется поршень, если количество воздуха под ним увеличить в $n=5$ раз, а температуру воздуха повысить до $t_2=37^\circ\text{C}$?

7. Два одинаковых заряженных шарика соединены нитью длиной $l=5$ см и с помощью двух нитей такой же длины прикреплены к точке подвеса, причем точка подвеса и шарик лежат в вершинах равнобедренного треугольника. После того как нить, соединяющую шарик, перерезали, они начали двигаться с ускорением $a=40$ м/с². Определите скорость шариков в момент, когда они окажутся на одном уровне с точкой подвеса.

8. Заряженный шарик массой $m=1,5$ г, прикрепленный к невесомой изолирующей нити, находится в однородном горизонтальном электрическом поле, при этом нить отклонена от вертикали на угол $\alpha=30^\circ$ (рис. 6). Затем направление электрического поля мгновенно изменяется на противоположное. Найдите силу натяжения нити в момент максимального отклонения нити от вертикали после переключения поля.

9. Источник тока подключают к цепи, содержащей конденсатор и резисторы с сопротивлениями $R_1=1$ Ом и $R_2=3$ Ом (рис. 7). Сразу после замыкания ключа K подключенный к источнику вольтметр показывает напряжение $U_1=6$ В, а после того как конденсатор зарядится — напряжение $U_2=9,6$ В. Найдите показания вольтметра при разомкнутом ключе. Током через вольтметр пренебречь.

10. Небольшому шарик, который находился на поверхности горизонтально расположенной тонкой собирающей линзы с оптической силой $D=0,5$ дптр, сообщили вертикальную начальную скорость $v_0=10$ м/с. Сколько времени будет существовать действительное изображение шарика в этой линзе?

Публикацию подготовили
Д. Ф. Калинин, А. И. Руденко,
В. Е. Чижов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$$

и вычислите его значение при $x=1,21$.

2. Решите уравнение

$$\frac{8x^2-2,5}{16x} + \frac{8x}{16x^2-5} = 1.$$

В ответе запишите его больший корень.

3. Найдите расстояние от начала координат до точки пересечения графика функции $y=\sqrt{9-x}-\sqrt{4-x}$ с прямой $y=1$.

4. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{3x+3}{x+6} < 1.$$

В ответе запишите количество целых чисел, удовлетворяющих этому неравенству.

5. Найдите двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $2\frac{2}{3}$, а разность между искомым числом

и числом, написанным теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке, равна 18.

6. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ на отрезке $[0; 2]$.

7. Упростите и вычислите без таблиц

$$\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{13\pi}{15} + \sin \frac{23\pi}{15} + \sin \frac{\pi}{6}.$$

8. Решите уравнение

$$1 - \sin 3x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2.$$

В ответе запишите число корней уравнения, принадлежащих отрезку $[\pi/2; 2\pi]$.

9. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BN . Найдите площадь треугольника ABC , если длина AM равна 3, а длина BN равна 4.

10. Одна из вершин куба и середины его ребер, выходящих из противоположной вершины, служат вершинами пирамиды. Найдите объем пирамиды, если длина ребра куба равна 6.

Вариант 2

1. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна 4, а сумма квадратов ее членов равна 48. Найдите сумму первых четырех ее членов.

2. Решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=\sqrt{2x-1}-2x$.

3. Решите уравнение

$$\log_3(x-2) + \log_{\sqrt{6}}(x^2-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4.$$

4. Решите неравенство

$$(0,5)^{x+2x} > 0,125 \cdot 2^{-x}.$$

В ответе запишите количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

5. Имеется сплав меди с оловом массой 10 кг, содержащий 50 % меди. Сколько килограммов чистого олова нужно прибавить к этому куску, чтобы получившийся сплав имел 40 % меди?

6. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + \frac{1}{(x^2+1)^2} + 5.$$

7. Найдите $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$, если $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{1}{3}$.

8. Решите уравнение

$$\sin lx + \cos lx - 1 = 0.$$

В ответе запишите сумму корней уравнения, принадлежащих интервалу]0; 4[.

9. Вершины правильного треугольника лежат на трех параллельных прямых, причем внутренняя прямая находится на расстоянии $\sqrt{21}$ и $\sqrt{84}$ от крайних прямых. Найдите длину стороны треугольника.

10. В конус вписан цилиндр наибольшего объема так, что одно из оснований цилиндра лежит на основании конуса, а окружность другого основания лежит на боковой поверхности конуса. Найдите отношение объема конуса к объему цилиндра.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Свободно падающее тело за последнюю секунду падения прошло путь $l=63,7$ м. С какой высоты выпало тело?

2. Определите силу, действующую на стержень AB , если угол $\alpha=45^\circ$, а масса груза $m=2$ кг (рис. 1).

3. Определите, какой скоростью должно обладать тело в точке D , чтобы переместиться в точку A и там остановиться (рис. 2). Коэффициент трения при движении тела $\mu=0,2$, $|AB|=0,5$ м, $|DB|=10$ м.

4. Однородный стержень массой $m=6$ кг подвешен на двух нитях одинаковой длины $l=0,5$ м каждая (рис. 3). Определите силу натяжения нити, если длина стержня $a=0,8$ м.

5. В стеклянной трубке, запаянной с одного конца, находится столбик воздуха, закрытый столбиком ртути высотой $h=200$ мм. Если трубку держать вертикально открытым концом вверх, то длина воздушного столбика $l_1=6$ см, а если перевернуть трубку на 180° , то длина воздушного столбика станет $l_2=15$ см. Чему равно атмосферное давление? Температуру считать постоянной.

6. После сгорания горючей смеси температура продуктов сгорания в цилиндре под поршнем повысилась до $t_1=600^\circ\text{C}$, а расстояние между поршнем и дном цилиндра увеличилось до $l=50$ см. На какое расстояние

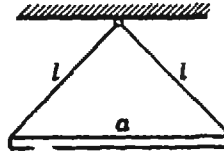


Рис. 3.

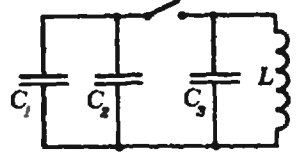


Рис. 4.

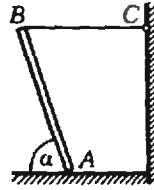


Рис. 5.

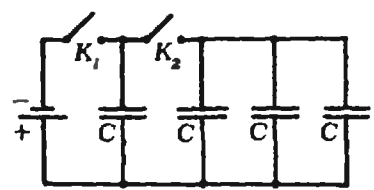


Рис. 6.

переместился поршень при охлаждении продуктов сгорания в цилиндре до температуры $t_2=90^\circ\text{C}$? Весом поршня и его трением о стенки цилиндра пренебречь. Коэффициент объемного расширения принять равным $\alpha=1/273 \text{ K}^{-1}$.

7. Конденсатор емкостью $C_1=3$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_1=300$ В. Конденсатор емкостью $C_2=2$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_2=200$ В. Конденсаторы соединяют разноименными обкладками. Определите среднюю величину тока, возникающего при соединении конденсаторов, если длительность его протекания $t=1$ с.

8. Определите массу медных проводов, необходимых для монтажа двухпроводной линии передачи от источника питания с напряжением $U=2400$ В до потребителя, находящегося на расстоянии $l=5$ км от источника напряжения. Мощность, передаваемая потребителю, равна $W=60$ кВт. Падение напряжения в линии электропередачи составляет 8 %.

9. В схеме, изображенной на рисунке 4, амплитудное значение тока до замыкания ключа равно I_1 , а после замыкания ключа — I_2 . Определите отношение I_1/I_2 , если ключ был замкнут, когда напряжение на конденсаторе было максимальным. Емкость всех конденсаторов одинакова: $C_1=C_2=C_3$, а индуктивность катушки постоянна и равна L . До замыкания ключа конденсаторы емкостью C_1 и C_2 заряжены не были.

10. Сероуглерод с показателем преломления $n=1,63$ налит в широкий сосуд до высоты $h=10$ см, считая от дна сосуда. На дне сосуда в центре помещен точечный источник света. Найдите площадь поверхности сероуглерода на границе с воздухом, через которую свет выходит наружу.

Вариант 2

1. Двигаясь равноускоренно, материальная точка в первые два равных последовательных промежутка времени по $t=4$ с каждый проходит пути $l_1=20$ м и $l_2=30$ м. Определите начальную скорость точки.

2. Цепь длиной $l=1$ м лежит на столе так, что ее конец свешивается с края стола. При какой длине свешивающейся со стола части цепи вся цепь начинает скользить по столу, если коэффициент трения цепи о стол $\mu=1/3$?

3. Материальная точка массой $m=1$ кг равномерно вращается по окружности со скоростью $v=10$ м/с. Определите модуль изменения импульса материальной точки за одну четверть периода вращения.

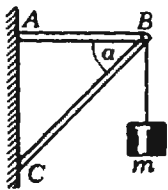


Рис. 1.

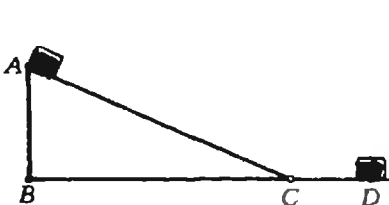


Рис. 2.

4. Однородный стержень AB опирается на шероховатый пол и удерживается от падения прикрепленной к вертикальной стенке горизонтальной нитью BC (рис. 5). Коэффициент трения между стержнем и полом $\mu=0,5$. При каком угле наклона стержня к горизонтالي стержень будет находиться в равновесии?

5. В цилиндре, закрытом поршнем, находится $m=0,2$ кг углекислого газа. Определите работу, которая совершается при изобарном нагревании газа на $\Delta T=88$ К.

6. Определите давление насыщенного водяного пара при температуре $t=17^\circ\text{C}$, если в комнате объемом $V=50$ м³ при относительной влажности $\varphi=65\%$ и указанной температуре находится $m=0,476$ кг паров воды.

7. В схеме, изображенной на рисунке 6, ключ K_1 замыкается и конденсатор заряжается. Затем ключ K_1 размыкается, а замыкается ключ K_2 . Найдите ЭДС батареи, если напряжение на первом слева конденсаторе после замыкания ключа K_2 стало равным $U=0,5$ В. Емкость всех конденсаторов одинакова.

8. Математический маятник представляет собой шарик массой $m=1$ г, подвешенный на нити длиной $l=36$ см. Чему равен период колебаний маятника, если, сообщив шарiku положительный заряд $q=6,7 \cdot 10^{-9}$ Кл, поместить маятник в однородное электрическое поле напряженностью E ($E=3 \cdot 10^5$ В/м), силовые линии которого направлены вертикально вниз?

9. Квадратная рамка со стороной $a=50$ см помещена в однородное магнитное поле перпендикулярно магнитным линиям поля. Определите индукцию магнитного поля, если известно, что при исчезновении магнитного поля в течение $\tau=0,01$ с среднее значение ЭДС индукции, возникающей в рамке, $\mathcal{E}=50$ мВ.

10. Пучок параллельных лучей света шириной $b=20$ см выходит из стеклянной пластинки в воздух через плоскую грань пластинки. Определите ширину пучка в воздухе, если угол падения луча на границу стекло — воздух $\alpha=30^\circ$, а показатель преломления стекла $n=1,8$.

Публикацию подготовили
В. И. Башкиров, В. А. Карасев

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x) = \frac{(\sqrt{3}+x)(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{x^2})^{-1} - (\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3x-\sqrt[3]{x^2\sqrt{3}}})^{-1}}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3x-\sqrt[3]{x^2\sqrt{3}}})^{-1} - \sqrt[3]{x\sqrt{3}-2\sqrt[3]{3}}} + 2 \cdot \sqrt{3} \log_3 \sqrt[3]{3}$$

2. Решите графически систему неравенств

$$\begin{cases} 2x+y > 2, \\ 4x^2-y < 4, \\ 9-2y > 0. \end{cases}$$

3. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x^4$ и постройте ее график.

4. Найдите все корни уравнения

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 0,5 \cdot \sin^2 2x,$$

лежащие в интервале $]-\frac{3\pi}{4}; \pi[$.

5. Площадь прямоугольного треугольника равна S , а его острый угол равен α . Треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину угла α и параллельной противоположному этому углу катету. Найдите объем тела вращения.

Вариант 2

1. Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x) = \left[(\sqrt{x}+1)\sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^{-2}} - \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x}-1)^{-2}}{\sqrt{x^2-\sqrt{x}+1}}} \right]^{-2} \frac{(1-x)^2}{x+2\sqrt{x}+1}$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{4 \log_2^2(2x-1) + \log_2(2x-1) - 5}.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{16}{9}x^3 + 4x^2 + 1$ на отрезке $[-2,5; 0,5]$ и постройте ее график на указанном отрезке.

4. Найдите все корни уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^3 x - \frac{1}{\cos^2 x} &= \\ &= 1 + \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} - \left(\sin \frac{\pi}{6} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{(3\pi^2 - \pi x - 4x^2)^{-1}} > \log_7(1/e).$$

5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α , а с большей боковой гранью — угол β . Найдите объем параллелепипеда, если площадь его основания равна S .

Задачи устного экзамена

1. Пусть M — ортоцентр треугольника ABC (то есть точка пересечения высот треугольника ABC). Докажите, что точка M' , симметричная точке M относительно любой стороны треугольника ABC , лежит на окружности, описанной около этого треугольника.

2. Докажите, что функция $y = \cos \sqrt[3]{x}$ не является периодической.

3. Докажите, что при любом $a < 4$ уравнение

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x} + \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 4x} + \frac{\sin^2 4x}{\sin^2 x} = a$$

не имеет решений.

4. Докажите, что при всех $\alpha \in]0; \pi/2[$ справедливо неравенство

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} > 1 + \operatorname{ctg} \alpha.$$

5. Постройте графики функций

$$\text{а) } y = \frac{x-1}{|x-1|}; \quad \text{б) } y = 10^{\lg(-x)}.$$

6. Найдите значения производных функций

$$\text{а) } f(x) = 2^{|x|}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{x|x-2|}{2(x-2)}$$

в точке $x=1$.

7. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\sin^{-4} x + \sin^4 x + 2^x + 2^{-x} - 3}.$$

8. Докажите, что

$$\lg 1 - \lg 2 + \lg 3 - \lg 4 + \lg 5 - \lg 6 + \dots + \lg 99 - \lg 100 < -1.$$

9. Упростите выражение

$$\left[2 + \lg \frac{x^2}{y^2} - 2 \lg(-x) + 2 \lg(-y) \right]^{\lg 1}.$$

10. Вычислите без таблиц

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ.$$

С 1982 года в Московском энергетическом институте проводится эксперимент по проведению устного экзамена по математике с применением ЭВМ. В 1984 году такой экзамен проводился на одном из факультетов. Мы приводим один из вариантов экзаменационного задания, состоящего из 20 примеров и задач. Абитуриент записывает ответ на специальном бланке. Проверку правильности ответа проводит ЭВМ.

В а р и а н т 1

1. Сколько цифр содержится в числе 2^{100} , если считать, что $\lg 2 = 0,301$?

2. Найдите значение производной функции

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \text{ при } x=1.$$

3. Найдите число, 7,5 % которого равно A , где

$$A = \frac{\left(8 \frac{7}{55} - 6 \frac{17}{110}\right) \cdot 1 \frac{3}{217}}{\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{20}\right) : 1 \frac{7}{8}}.$$

4. Известно, что числа $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите значение $y = \operatorname{tg} 2x - 0,21$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна ее боковому ребру. Найдите объем пирамиды, если ее боковое ребро равно $\sqrt{3}$ см.

6. Решите уравнение

$$\frac{x}{2} - 2 = \frac{x^2}{2(\sqrt{x+1}+1)}.$$

7. Найдите наименьший положительный период функции

$$f(x) = 5 \sin(x\pi - 1).$$

8. Какое число больше: первое или второе?

1) $(\log_2 5)^2$; 2) $\log_2 20$. В ответе укажите номер числа.

9. Найдите значение x из пропорции

$$\frac{3^{13} \cdot x}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}} = \frac{81^{-4} \cdot (\sqrt[3]{9})^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \sqrt[4]{81}}.$$

10. Решите уравнение

$$\log_7 \cos x = x^2.$$

11. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{4}.$$

12. В геометрической прогрессии третий член равен 16, седьмой член равен 1. Найдите первый член этой прогрессии.

13. При каком значении a уравнение $\sin x = \frac{1}{2}(a+2)$ допускает решение $x = \frac{\pi}{6}$?

14. В уравнении $5x^2 + bx - 28 = 0$ найдите значение коэффициента b , если известно, что

число b целое и что корни уравнения x_1 и x_2 связаны соотношением $5x_1 + 2x_2 = 1$.

15. Вычислите без таблиц $(\lg 10^{\sin 1})^2 + (\log_3 3^{\cos 1})^2$.

16. Около круга радиуса 2 см описана равнобедренная трапеция с острым углом 30° . Найдите длину средней линии трапеции.

17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x) = 0, \\ x^2 - x\sqrt{3} = 0. \end{cases}$$

18. Найдите наибольший корень уравнения

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1).$$

19. Вычислите значение $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, если известно, что $\sin 2\alpha = \frac{1}{5}$.

20. Сколько целых значений x удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{3}{x+4} \right| > 1?$$

Физика

На одних факультетах экзамен по физике проводится в письменной форме, на других — в устной.

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. Электромагнитная индукция. Поток магнитной индукции. Электродвижущая сила индукции. Правило Ленца.

2. Электрический заряд $+Q$ перемещается в электрическом поле плоского конденсатора по траектории $ABCD$ (рис. 1). На каких участках работа поля по перемещению заряда отрицательна? положительна? равна нулю? Какова работа по перемещению заряда по всей траектории $ABCD$?

3. Пушка, стоящая на платформе, стреляет в направлении рельсов под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Масса снаряда $m = 50$ кг, начальная скорость снаряда $v_0 = 600$ м/с. Какую скорость приобретет платформа при выстреле, если ее масса с пушкой составляет $M = 5 \cdot 10^4$ кг? Платформа не заторможена.

4. Луч света падает под углом α на плоскопараллельную пластину, толщина которой d . Вычислите смещение луча при его прохождении сквозь пластину. Показатель преломления стекла n .

5. Три одинаковых сосуда, соединенных тонкими теплопроводящими трубками, заполнены при температуре $T_1 = 10$ К некоторым количеством газообразного гелия. Затем один из сосудов нагрели до $T_2 = 40$ К, а второй до $T_3 = 100$ К. Температура третьего сосуда осталась неизменной. Во сколько раз изменилось давление в системе?

В а р и а н т 2

1. Закон Архимеда для жидкостей и газов. Выталкивающая сила. Условие плавания тела.

2. Постройте ход лучей 1 и 2, преломленных рассеивающей линзой; F_1 и F_2 — фокусы линзы (рис. 2).

3. Два одинаковых проводящих шарика, обладающие зарядами $Q_1 = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл и $Q_2 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл, находятся на расстоянии $l = 4$ см друг от друга. Их приводят в соприкосновение и удаляют на прежнее расстояние. Найдите силу взаимодействия до и после соприкосновения шариков. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

4. С какой высоты H падает тело массой m на невесомую пружину жесткостью k , если

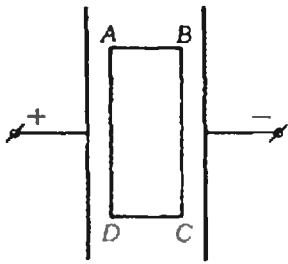


Рис. 1.

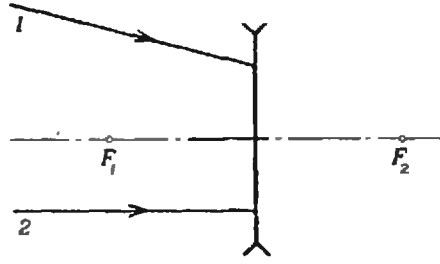


Рис. 2.

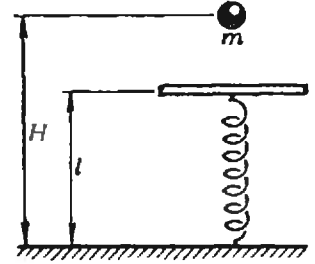


Рис. 3.

максимальная сила давления пружины на пол равна N (рис. 3)? Длина свободной пружины l .

5. При передаче электроэнергии на большое расстояние используется трансформатор, повышающий напряжение до $U=6 \cdot 10^5$ В и нагруженный до номинальной мощности $P=10^6$ Вт. При этом разность показаний счетчиков электроэнергии, установленных на трансформаторной подстанции и в приемном пункте, увеличивается ежедневно на $\Delta W=216$ кВт · ч. Во сколько раз необходимо повысить напряжение в линии, чтобы при передаче потерн электроэнергии не превышали $\eta=0,1$ %?

Задачи устного экзамена

1. Снаряд в верхней точке своей траектории разорвался на два осколка с массами $m_1=3$ кг и $m_2=5$ кг. Скорость снаряда непосредственно перед разрывом равнялась $v_0=600$ м/с, скорость большого осколка сразу после разрыва

равнялась $v_2=800$ м/с, а направление ее совпало с направлением движения снаряда перед разрывом. Определите скорость малого осколка сразу после разрыва.

2. На плоту, состоящем из $n=20$ одинаковых бревен можно перевозить груз максимальной массы $m=1800$ кг. Определите плотность древесины, если объем каждого бревна $V=0,3$ м³, а плотность воды $\rho_0=1000$ кг/м³.

3. Проводник длиной $l=10$ см, по которому течет ток $I=15$ А, перемещается в однородном магнитном поле с индукцией $B=0,5$ Тл на расстояние $s=20$ см. Определите максимальную работу, которая совершается при перемещении проводника. Как при этом должен двигаться проводник?

Публикацию подготовили
В. Ф. Сафонов, В. Л. Чудов

Наша обложка

Мы приведем два решения задачи, помещенной на 4 с. обложки «Кванта» № 2. Поскольку наша цель — помочь читателю научиться решать сложные стереометрические задачи, а не дать образцы оформления решений, мы стараемся выделять основные идеи, опуская в то же время некоторые детали рассуждений. Читатель без труда восстановит их самостоятельно; в наиболее важных случаях соответствующие места в тексте помечены так: (?). Для краткости некоторые обозначения, смысл которых ясен из чертежа на обложке или из рисунков, в тексте не объясняются.

Итак, пусть $ABCD$ — основание данной пирамиды, S — ее вершина, O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$.

Первое решение основано на очевидной формуле, связывающей радиус r окружности, вписанной в угол φ , с расстоянием a от точки ее касания со сторонами угла до его вершины (рис. 1):

$$a = r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}. \quad (1)$$

Рисунок 1 можно рассматривать и как сечение двугранного угла величины φ с вписанной в него сферой радиуса r плоскостью, проходящей через центр сферы перпендикулярно ребру угла; в этом случае величина a в (1) — это расстояние от точки касания сферы с гранью угла до его ребра. Отсюда же видно, что центр этой сферы лежит на биссекторной плоскости двугранного угла (?).

Переходя к задаче, заметим, что, поскольку O — центр окружности, вписанной в основание

пирамиды, SO — ось данного конуса и, следовательно, высота пирамиды.

Найдем радиус r_1 сферы, вписанной в трехгранный угол пирамиды с вершиной S . Рассмотрим сечение данной конфигурации плоскостью SAC (рис. 2): она содержит ось SO конуса и центр O_1 сферы (SAC — биссекторная плоскость двугранного угла пирамиды при ребре SC (?), следовательно — образующую конуса SK , проходящую через точку касания конуса со сферой, и точку касания L сферы с основанием пирамиды ($SAC \perp ABC$). Выразим отрезки, входящие в равенство

$$|OC| = |OK| + |KL| + |LC|.$$

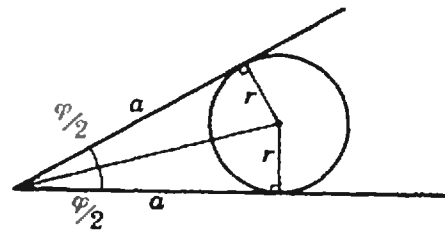


Рис. 1.

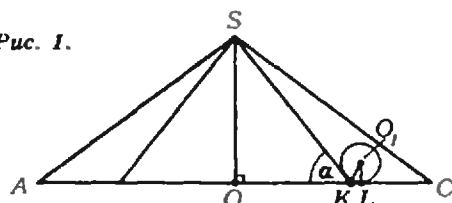


Рис. 2.

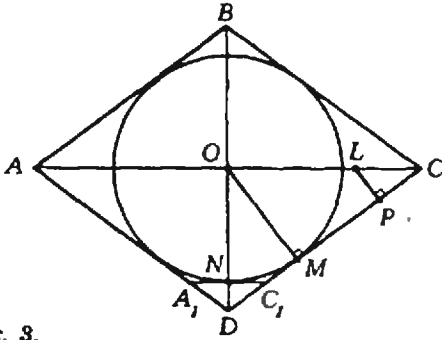


Рис. 3.

через r_1 и данные по условию величины — это даст нам уравнение для r_1 :

$$|OC|=4; \\ |OK|=|OM|=\frac{|OC|\cdot|OD|}{|CD|}=\frac{4\cdot 3}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{12}{5}$$

(OK и OM — радиусы основания конуса (рис. 3), OM — высота прямоугольного треугольника OCD);

$|KL|=r_1\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, где α — угол между образующей и основанием конуса (см. рис. 2 и формулу (1));

$$|LC|=\frac{|CD|\cdot|LP|}{|OD|} \text{ (рис. 3; } \triangle CLP\sim\triangle CDO\text{);}$$

$|LP|=r_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ (формула (1); величина двугранного угла пирамиды при ребре CD равна α (?)).

Итак,

$$4=\frac{12}{5}+r_1\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{3}r_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

или

$$r_1=\frac{24}{5\left(3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+5\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{12\sin\alpha}{5(4+\cos\alpha)}=\frac{3}{16},$$

поскольку

$$\sin\alpha=\frac{|SO|}{|SM|}=\frac{1}{\sqrt{1+(12/5)^2}}=\frac{5}{13},$$

$$\cos\alpha=\frac{|OM|}{|SM|}=\frac{12}{13}. \quad (2)$$

Очевидно, радиус сферы, вписанной в трехгранный угол A , тоже равен $3/16$; радиус двух других сфер мы для разнообразия найдем другим способом.

Второе решение использует выраже-

ние для радиуса r сферы, вписанной в тетраэдр объема V с площадью полной поверхности S

$$r=3V/S. \quad (3)$$

(Для доказательства (3) надо представить V как сумму объемов четырех тетраэдров высоты r с общей вершиной в центре вписанной сферы, основаниями которых являются грани данного тетраэдра; вспомните аналогичную формулу из планиметрии.)

Найдем радиус r_2 сферы, вписанной в трехгранный угол D . Проведем через точку ее касания с конусом их общую касательную плоскость. Пусть она пересекает ребра DA и DC в точках A_1 и C_1 , тогда $A_1C_1\parallel AC$ (?). Наша сфера вписана в тетраэдр SA_1C_1D ; найдем последовательно (см. рис. 2):

$$\text{высоту его основания } A_1C_1D: |DN|= \\ =|DO|-|ON|=|DO|-|OM|=3-\frac{12}{5}=\frac{3}{5};$$

$$\text{сторону основания } A_1C_1: |A_1C_1|=\frac{|DN|}{|DO|}\times \\ \times|AC|=\frac{8}{5} (\triangle A_1C_1D\sim\triangle ACD);$$

$$\text{площадь основания: } S_{A_1C_1D}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}\times \\ \times\frac{3}{5}=\frac{12}{25};$$

$$\text{объем: } V_{SA_1C_1D}=\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{25}\cdot 1=\frac{4}{25};$$

сумму площадей ортогональных проекций боковых граней на основание: $S_{A_1C_1O}+S_{A_1DO}+$
 $+S_{C_1DO}=\frac{1}{2}(|ON|+|OD|)\cdot|A_1C_1|=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{12}{5}+3\right)\frac{8}{5}=\frac{108}{25}.$$

Поскольку все боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом α (?) и $\cos\alpha=12/13$ (см. (2)), по формуле для площади ортогональной проекции найдем, что площадь боковой поверхности тетраэдра равна

$$S_{\text{бок}}=\frac{108}{25}\cdot\frac{13}{12}=\frac{117}{25}.$$

Окончательно,

$$r_2=\frac{3V}{S_{A_1C_1D}+S_{\text{бок}}}=\frac{3\cdot 4}{12\cdot 117}=\frac{4}{43}.$$

Ответ: радиусы сфер при вершинах большей диагонали основания равны $3/16$, при вершинах меньшей диагонали — $4/43$ см.

П. И., В. Н.

Победители шахматного конкурса 1984 года

Победителями конкурса признаны: Г. Бедный (Бердичев), А. Бондаренко (Миллерово), Э. Броченко (Москва), М. Германов (с. Чаша Курганской обл.), А. Каган (Ташкент), М. Карнаухов (Кропоткин), И. Кваша (Новочеркасск), Г. Леонов (Курган), С. Локтев (Вязники), В. Мамедов (Астара), В. Москаленко (Ворошиловград), Г. Пушкарев (Усолье-Сибирское),

А. Рябов (Куйбышев), А. Серебренников (Москва), А. Сулейманов (с. Санджаради Аз. ССР), А. Чилингарян (Ереван), А. Ярцев (ст. Брюховицкая Краснодарского кр.). Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются дипломом и значком журнала «Квант», шахматно-математической литературой с автографами А. Е. Карпова и Е. Я. Гика и получают право на присвоение I разряда по шахматам.

Кроме того, еще 33 читателя по итогам конкурса получают право на присвоение II разряда по шахматам.



Избранные школьные задачи

1. Пусть стороны AD и AB четырехугольника $ABCD$ равны a и b соответственно, а угол между ними равен α (рис. 1). Пусть далее прямые CD и AB пересекаются в точке E . Из прямоугольного треугольника ADE получаем $AE = a/\cos \alpha$. Поэтому $BE = a/\cos \alpha - b$. Из $\triangle BCE$ находим $BC = BE \cdot \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = BE \cdot \operatorname{ctg} \alpha = (a - b \cos \alpha)/\sin \alpha$. Аналогично, $CD = (b - a \cos \alpha)/\sin \alpha$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD \cdot DC + AB \cdot BC) = (2ab - (a^2 + b^2) \cos \alpha)/2 \sin \alpha$.

2. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$.

3. Ответ. 24 мили. 6 ч 30 мин вечера. Указание. Одну милю по ровному месту путешественники проходят за $\frac{1}{4}$ часа, в гору — за $\frac{1}{3}$ часа и под гору — за $\frac{1}{6}$ часа. Следовательно, каждую милю пути туда и обратно путешественники проходят за $\frac{1}{2}$ часа. Отсюда следует, что расстояние, пройденное путешественниками за 6 часов, равно 24 милям. Если 12 миль они проходят по ровному месту, то на это у них уходит 3 часа, а если в гору, то 4 часа. Следовательно «в среднем» до вершины горы они идут 3,5 часа.

4. Решение. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 2). Проведем прямые, перпендикулярные сторонам AB в точке A и BC в точке C . Пусть D — точка пересечения этих прямых, а прямая BD пересекает AC в точке E . Точка E — искомая. (Для того чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы углы A и C были острыми).

5. Пусть ABC — данный угол и P — точка внутри него (рис. 3). Через точку P проведем $PD \parallel BC$ и от точки D отложим на луче DA отрезок $DQ = BD$. Прямая QP пересекает сторону BC в точке R . Докажем, что треугольник BQR — искомым. Построим треугольник BQR до параллелограмма $BRSQ$ и рассмотрим произвольный треугольник BEH , сторона которого проходит через точку P . Треугольник BEH получается из треугольника BQR «отрезанием» треугольника EQP и «добавлением» треугольника RPH , площадь которого больше площади треугольника RPE (E' — точка пересечения RS и EH), которая, в свою очередь, равна площади EPQ .

6. Ответ: В полдень третьего дня пешеход A обгонит пешехода B на расстоянии в 23 мили от своего отправного пункта, а в конце четвертого дня пути B догоняет A на расстоянии

в 34 мили от отправного пункта A . Решение. Пользуясь формулой суммы арифметической прогрессии, нетрудно установить, что через x дней пешеход B пройдет расстояние $(2 \cdot 2 + (x-1)2) \cdot 2/2$, а пешеход A — $(2 \cdot 10 - (x-1)) \cdot x/2$. По условию $(2 \cdot 10 - (x-1))x/2 = 14 + (2 \cdot 2 + (x-1)2)x/2$. Решая это уравнение, получим $x_1 = 4$, $x_2 = 7/3$. Второй корень уравнения не подходит, так как мы считали, что x — целое число. Однако само наличие этого корня показывает, что в течение 3-го дня пешеход A обгонит пешехода B . Выясним, когда это произойдет. К концу второго дня пешеход A пройдет 19 миль, а B будет находиться на расстоянии 20 миль от пункта, из которого вышел A . Таким образом, в начале третьего дня B опережает A на 1 милю. В течение этого дня A движется со скоростью $6\frac{1}{12}$ миль/ч, а B — со скоростью $6\frac{1}{12} = 1\frac{1}{2}$ миль/ч.

Поэтому через время $t = 1 \cdot (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) = 6$ ч пешеход A догонит пешехода B .

7. Пусть d — длина общей хорды двух данных окружностей (рис. 4). Тогда радиус меньшей окружности равен d , а радиус большей — $d/(2 \sin 15^\circ)$. Площадь S_1 красного сегмента равна разности площадей сектора и треугольника, то есть $S_1 = \pi d^2/6 - d^2\sqrt{3}/4$. Точно так же

площадь S_2 голубого сегмента равна $S_2 = \frac{\pi}{12} \frac{d^2}{4 \sin^2 15^\circ} - \frac{1}{4} \frac{d^2}{4 \sin^2 15^\circ}$. Поскольку $4 \sin^2 15^\circ = 2(1 - \cos 30^\circ) = 2 - \sqrt{3}$, $S_2 = \frac{\pi}{12} \frac{d^2(2 + \sqrt{3}) - d^2(2 + \sqrt{3})}{4}$. Требуемое отношение равно $(S_1 + S_2)/(\pi d^2) = (4 + \sqrt{3})/12 - (1 + \sqrt{3})/2\pi \approx 0,043...$

8. Пусть $ABCD$ — произвольная трапеция, вписанная в данную окружность радиуса r (рис. 5). Проведем через центр O этой окружности диаметр, перпендикулярный основаниям AD и BC и пересекающий их в точках H и K соответственно. Пусть $|BC| = 2x$. Тогда $|AD| = 4x$ и $S_{ABCD} = 3x \cdot |KH|$, где $0 < x < r/2$. Можно считать, что точка O лежит внутри трапеции (почему?), поэтому $|KH| = |KO| + |OH| = \sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - 4x^2}$, так что $S_{ABCD} = S(x) = 3x(\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - 4x^2})$. Приравнявая

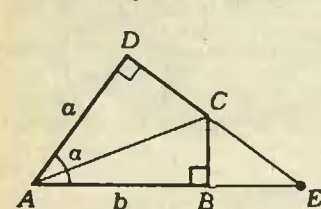


Рис. 1.

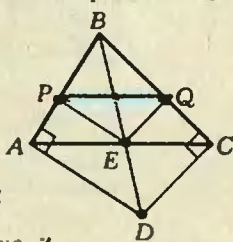


Рис. 2.

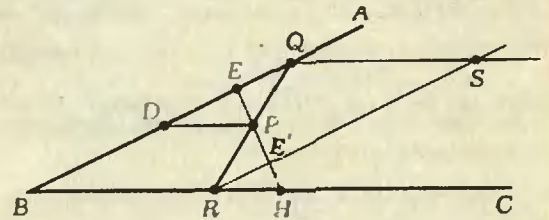


Рис. 3.

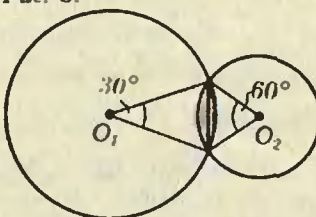


Рис. 4.

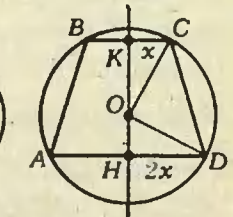


Рис. 5.

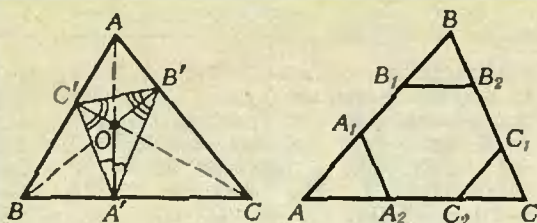


Рис. 6.

Рис. 7.

к нулю производную функции $f(x) = \frac{1}{3} S(x) = x(\sqrt{r^2-x^2} + \sqrt{r^2-4x^2})$, получим уравнение

$$f'(x) = \sqrt{r^2-x^2} + \sqrt{r^2-4x^2} - x'(1/\sqrt{r^2-x^2} + 4/\sqrt{r^2-4x^2}) = 0,$$

которое после преобразований приводится к виду

$$16x^4 - 20r^2x^2 + 3r^4 = 0,$$

откуда $x^2 = (5 \pm \sqrt{13})r^2/8$.

Второй корень нас не устраивает, так как $\frac{\sqrt{5+\sqrt{13}}}{2} > 1$, то есть окажется, что $2x > r$.

Итак, критическая точка определяется равенством

$$x_{кр} = r \sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{8}}.$$

Нетрудно убедиться, что это точка максимума.

9. Ответ: 1 шиллинг 7 пенсов. Решение. Пусть x , y и z — стоимости в пенсах лимонада, бутерброда и бисквита соответственно. Из условия получаем систему

$$\begin{cases} x+3y+7z=14, \\ x+4y+10z=17. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 5 и вычтя из него второе уравнение, умноженное на 3, получим $2x+3y+5z=19$.

10. Пусть ABC — данный треугольник, $A'B'C'$ — требуемый (рис. 6). Поскольку перпендикуляры к сторонам AB , AC и BC , проведенные через точки C' , B' и A' , являются биссектрисами углов треугольника $A'B'C'$, они пересекаются в некоторой точке O , причем $\widehat{C'OB'} = \pi - \widehat{A}$. Пусть $\widehat{C'A'B'} = 2\alpha$. Тогда $\widehat{C'OB'} = (\pi + 2\alpha)/2 = \pi/2 + \alpha$. Отсюда получаем, что $\alpha = \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$, то есть $\widehat{C'A'B'} = \widehat{B'A'C'} = \widehat{A}$. Аналогично, $\widehat{B'C'A'} = \widehat{C}$, $\widehat{C'B'A'} = \widehat{B}$. Поэтому $\triangle BC'A' \sim \triangle AC'B' \sim \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. Из подобия сразу следует, что

$$\begin{aligned} |BA'| &= \frac{c}{a} |BC'| = \frac{c}{a} (c - |AC'|) = \\ &= \frac{c}{a} (c - \frac{b}{c} |AB'|) = \frac{c^2}{a} - \frac{b}{a} (b - |CB'|) = \\ &= \frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} |CA'| = \\ &= \frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a} + a - |BA'|, \end{aligned}$$

откуда $|BA'| = (a^2 + c^2 - b^2)/(2a)$. По теореме косинусов $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos \widehat{B}$. Поэтому $|BA'| = c \cos \widehat{B}$. Это значит, что (AA') перпендикулярна (BC) . Аналогично доказывается, что

(CC') и (BB') перпендикулярны (AB) и (AC) соответственно. Итак, вершины треугольника $A'B'C'$ являются основанием высот треугольника ABC .

11. Ответ: $2(p^2 - V/p - S^2/p^2)$. Решение. Пусть a, b, c — стороны треугольника. По формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

или

$$S^2/p = p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+ac+bc)p - abc = p^3 - 2p^3 + (ab+ac+bc)p - V.$$

Таким образом, $ab+ac+bc = S^2/p^2 + V/p + p^2$. Поскольку $4p^2 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, окончательно получаем $a^2+b^2+c^2 = 2(p^2 - V/p - S^2/p^2)$.

12. Пусть n — число людей, сидящих за столом, и k — число шиллингов у самого «бедного» из них. После каждого тура количество шиллингов у каждого из игроков становится на 1 меньше. Значит, после k туров у самого «бедного» из них вообще ничего не останется и игра прекратится, когда «касса» в следующий раз дойдет до этого игрока. В этот момент в «кассе» будет $kh+n-1$ шиллингов. Наличие суммы могут относиться как 4:1 лишь для первого и последнего игроков. Поэтому либо $kh+n-1=4(n-k)$, либо $4(nh+n-1)=n-k$.

Первое уравнение приводится к виду $k=3-7/n$, откуда $n=7, k=2$.

Второе уравнение не имеет решений, так как из него следует, что $4nk=4-k-3n$, что невозможно.

13. Пусть A, B, B_1, C, A_1 — искомым шестиугольник (рис. 7). Ясно, что $\triangle BB_1B_2 \sim \triangle ABC$. Если k — коэффициент подобия этих треугольников, то $|BB_1|=kc, |BB_2|=ka, |B_1B_2|=kb; |AA_1|=c-|AB_1|=|BB_1|=c-k(b+c)$.

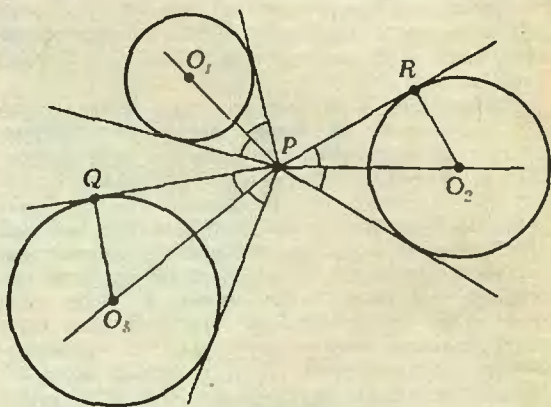


Рис. 8.

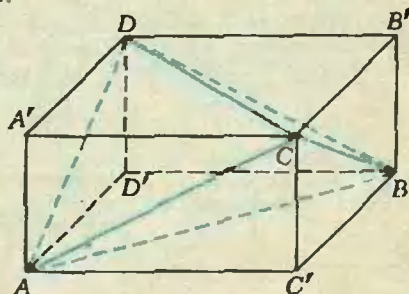


Рис. 9.

С другой стороны, $|A_1 A_2| = |AA_1| \cdot \frac{a}{c} = a \cdot \frac{|AA_1|}{c}$, и, следовательно, $kb = a \left(1 - \frac{k(b+c)}{c} \right)$, то есть $k = \frac{ac}{ab+bc+ac}$. Отсюда

$$\text{следует, что } |B_1 B_2| = \frac{abc}{ab+bc+ac}.$$

14. Пусть R_1, R_2, R_3 — радиусы башен. Ширина всех трех башен будет казаться одинаковой, если углы, образуемые касательными к каждой из окружностей, проведенными из искомой точки (рис. 8), будут равны. Из равенства этих углов следует, что $O_2 P Q = O_2 P R$. Поэтому $\triangle PRO_2 \sim \triangle RQO_3$. Это значит, что $\frac{|PO_2|}{|PO_3|} = \frac{R_2}{R_3}$.

Множество точек, удовлетворяющих этому условию, есть окружность («Квант», 1984, № 7, с. 37). Точно так же множество точек, из которых окружности с центрами O_2 и O_3 видны под равными углами, тоже являются окружностями. Точки пересечения этих двух окружностей являются искомыми.

15. Ответ: $\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}/12$. В данном тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра равны. Пусть $|AB|=|CD|=a$, $|BC|=|AD|=b$, $|AC|=|BD|=c$. Проведем через каждое из ребер плоскость, параллельную противоположному ребру. Полученные 6 плоскостей образуют параллелепипед $AD'BC'A'DB'C$, причем каждая грань (это параллелограмм с равными диагоналями) параллелепипеда является прямоугольником. Следовательно, параллелепипед — прямоугольный, а ребра тетраэдра являются диагоналями его граней (рис. 9). Пусть x, y, z — длины ребер параллелепипеда. По теореме Пифагора

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ y^2 + z^2 = c^2, \end{cases}$$

$$\text{откуда } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = s^2, z^2 = s^2 - a^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, y^2 = s^2 - b^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, x^2 = s^2 - c^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}. \text{ (Отсюда, в частности,}$$

следует, что грани тетраэдра — остроугольные треугольники.) Объем тетраэдра $ABCD$ равен $1/3$ объема V параллелепипеда, поскольку $V_{ABCD} = V - (V_{CC'BA} + V_{A'BDA} + V_{CB'DB} + V_{AD'BD})$, а объем каждого из тетраэдров, «отрезанных»

$$\text{от параллелепипеда, равен } \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} \cdot h = \frac{1}{6} Sh, \text{ где } S \text{ — площадь основания, а } h \text{ — высота параллелепипеда. Поэтому } V_{ABCD} = \frac{1}{3} V = \frac{1}{3} xyz = \frac{\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)(s^2 - c^2)}}{3}.$$

Сколько корней имеет уравнение?

1. $p > 1$.
- 2.
3. $]-\infty; 0] \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

$$4.] \frac{10 - 7\sqrt{7}}{108}; 0].$$

$$5.] \frac{9 - \sqrt{17}}{16} + \frac{1}{3} [U] \frac{1}{3}; \frac{9 + \sqrt{17}}{16} [$$

$$6. a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 1; a_3 = \frac{3}{2}.$$

$$7. a_1 = \frac{5}{6} \pi + 2\pi n; a_2 = \frac{\pi}{18} + 2\pi m; a_3.$$

$$8.] 2; \frac{7}{3} [\cup] \frac{7}{3}; 3 [\cup \left\{ \frac{7}{2} \right\}.$$

$$9. k = \frac{1}{3}.$$

$$10. \{-1\} \cup \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} [.$$

$$11. \left\{ 0; \frac{\pi}{3} \right\};] -\infty; -1 [\cup] 5; \infty [.$$

$$12.] 5; 11^3/4 [.$$

$$13. 4.$$

$$14.] -1/4; 0].$$

$$15. a = 1/\sqrt{2}.$$

$$16.] 3; 5 [.$$

$$17. \{-3 + \sqrt{a^2 + 4a + 5}; -3 - \sqrt{a^2 - 6a + 10}\} \text{ при } a < -2; \{-3 - \sqrt{a^2 + 4a + 5}; -3 - \sqrt{a^2 - 6a + 10}\} \text{ при } -2 < a < \frac{1}{2}; \{-3 - \sqrt{29/2}\} \text{ при } a = \frac{1}{2};$$

$$\{-3 - \sqrt{a^2 + 4a + 5}; -3 - \sqrt{a^2 - 6a + 10}\} \text{ при } \frac{1}{2} < a < 3; \{-3 - \sqrt{a^2 + 4a + 5}; -3 + \sqrt{a^2 - 6a + 10}\} \text{ при } a > 3.$$

Московский инженерно-физический институт
Математика

Вариант 1

$$1. x = \pm \arccos \left(-\frac{2}{3} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2. При $q < 15\%$ решений нет; при $15\% < q < 25\%$ $\frac{25-q}{5} < x < 2, y = 2 - x$ (x и y — количества литров, взятых из первого и второго сосудов соответственно). При $25\% < q < 100\%$ $x + y = 2, x > 0, y > 0$.

$$3. x = \frac{c^4 + 2c^2 + 25}{c^2} \text{ при } c \in]0; \sqrt{5}]; \text{ при остальных } c \in \mathbb{R} \text{ решений нет. Указание.}$$

Положив $y = \sqrt{\frac{x}{4} - 3}$, приходим к уравнению $\sqrt{y^2 + 5} = c + y$, откуда $2cy = 5 - c^2$.

$$4. S = \frac{3\sqrt{3}}{4} h^2 \sin \beta \operatorname{tg} \beta \text{ при } \beta \in]0; \operatorname{arctg} \sqrt{2}];$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} h^2 \operatorname{tg} \beta \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \beta} \text{ при } \beta \in [\operatorname{arctg} \sqrt{2}; \frac{\pi}{2} [.$$

Указание. Пусть A — середина отрезка PR (рис. 10). Если $\widehat{ASQ} < \frac{\pi}{2}$, то сечение PBR имеет наименьшую площадь при $(AB) \perp (SQ)$. Если же $\widehat{ASQ} > \frac{\pi}{2}$, то таким сечением служит грань \widehat{PSR} . Угол ASQ будет острым, если $\widehat{SAQ} + \widehat{SQA} > \frac{\pi}{2}$. Пусть $\varphi = \widehat{SAQ}, \psi = \widehat{SQA}$. Ясно, что

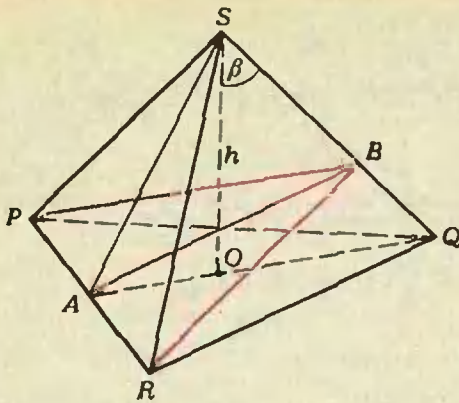


Рис. 10.

$\operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{tg} \psi$. Должно быть $\operatorname{tg}(\varphi + \psi) < 0$, то есть $\frac{3 \operatorname{tg} \psi}{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \psi} > 0$, откуда $\operatorname{tg} \psi > \frac{\sqrt{2}}{2}$, а так как

$\beta + \psi = \frac{\pi}{2}$, получим $0 < \beta < \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Вариант 2

1. $\{-7\} \cup [-6.3; -6] \cup -6; -5$.

2. $\frac{76}{55-2p}$ км/ч при $\frac{449}{26} < p < \frac{525}{26}$; при

$0 < p < \frac{449}{26}$ и $p > \frac{525}{26}$ решения нет. Указа-

ние. Из условия задачи получаем систему $px + 11y = 105$, $(p+5)x + 13y = 131$, $0 < y < x$.

3. $C \in]-\infty; 2] \cup \left\{ \frac{2}{3}; \pi \right\} \cup]4; +\infty[$.

Указание. Уравнение $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ на

промежутке $[-4; -2[$ имеет корень $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Этот корень будет единственным тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: уравнение $x + c = 0$ а) не имеет корней на промежутке $[-4; 2[$; б) имеет корень, совпадающий с $-\frac{2\pi}{3}$; в) имеет корень, не входящий в область определения функции ctg .

4. $\frac{r\sqrt{2}}{6} \operatorname{tg} \gamma$ при $r > \frac{3\sqrt{2}}{4} a$; $\frac{r\sqrt{2}-a}{2} \operatorname{tg} \gamma$ при

$\frac{a\sqrt{2}}{2} < r < \frac{3\sqrt{2}}{4} a$. Указание. Пусть ABCD —

квадрат с центром E, в который вписано основание конуса (рис. 11), O — центр квадрата PQRT, K и L — середины отрезков BC и QR соответственно. Из трапеции OEKL по-

лучим $|OL| = \frac{r\sqrt{2}}{2}$; $|EK| = \frac{r\sqrt{2}}{2} - x \operatorname{ctg} \gamma$, где $x = |OE|$. Объем конуса равен

$V(x) = \frac{1}{3} \pi |OE| \cdot |EK|^2 =$

$$= \frac{\pi}{3} x \left(\frac{r\sqrt{2}}{2} - x \operatorname{ctg} \gamma \right)^2,$$

причем $x \in]0; h[$, где $h = \frac{r\sqrt{2}-a}{2} \operatorname{ctg} \gamma$ —

высота данной усеченной пирамиды. Исследуя функцию $V(x)$ на экстремум с помощью произ-

водной, получим, что при $x = \frac{r\sqrt{2}}{6} \operatorname{tg} \gamma <$

$< \frac{r\sqrt{2}-a}{2} \operatorname{tg} \gamma$, высота конуса наибольшего

объема равна $x = \frac{r\sqrt{2}}{6} \operatorname{tg} \gamma$, а при $x > h$ функция

$V(x)$ возрастает на промежутке $]0; h[$.

Физика

1. Запишем условие равновесия коромысла в момент отрыва тела A (см. рис. 1 в статье):

$$T_2 l_2 - T_1 l_1 = 0,$$

где $T_1 = m_1 g$ — сила натяжения левой нити, T_2 — сила натяжения правой нити.

Сила натяжения T_2 будет максимальной в тот момент, когда правая нить принимает вертикальное положение. Запишем для этого момента второй закон Ньютона и закон сохранения механической энергии:

$$T_2 - m_2 g = \frac{m_2 v^2}{l},$$

$$\frac{m_2 v^2}{2} = m_2 g l (1 - \cos \alpha),$$

где l — длина нити, α — искомый угол ее отклонения. Из двух последних уравнений находим

$$T_2 = m_2 g (3 - 2 \cos \alpha).$$

Подставляя сюда значение силы натяжения из уравнения равновесия коромысла, найдем искомое значение угла α :

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} \right) = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

2. Обозначим через v_{1y} и v_{2y} проекции скоростей пули и доски на вертикальную ось после вылета пули из доски и запишем закон сохранения импульса в проекции на эту ось, а также закон сохранения энергии для пули и доски:

$$m_1 v_0 \sin \alpha = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y},$$

$$\frac{m_1 v_{1y}^2}{2} = m_1 g H,$$

$$\frac{m_2 v_{2y}^2}{2} = m_2 g h.$$

Отсюда получаем

$$h = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \frac{(v_0 \sin \alpha - \sqrt{2gH})^2}{2g} \approx 0.11 \text{ м.}$$

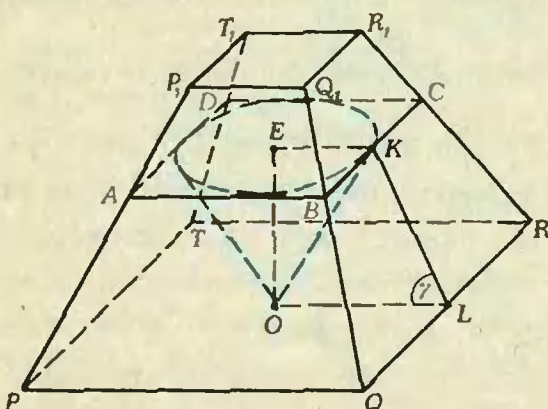


Рис. 11.

3. Когда нить отклонена на угол α , составляющие ускорения, направленные вдоль нити и по касательной к траектории шарика, определяются формулами

$$a_n = \frac{v^2}{l}, \quad a_k = g \sin \alpha,$$

где v — скорость шарика, l — длина нити. Поскольку ускорение шарика в этот момент направлено горизонтально, проекции векторов \vec{a}_n и \vec{a}_k на вертикальную ось одинаковы по модулю:

$$a_n \cos \alpha = a_k \sin \alpha,$$

или

$$\frac{v^2}{l} \cos \alpha = g \sin^2 \alpha,$$

откуда

$$v^2 = gl \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

Далее запишем закон сохранения энергии для шарика:

$$\frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos \alpha) = mgl(1 - \cos \alpha_m).$$

Решая это уравнение относительно $\cos \alpha_m$, получим

$$\cos \alpha_m = \cos \alpha - \frac{v^2}{2gl} = \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} = 0,73, \\ \alpha_m = 43^\circ.$$

4. Скорость шайбы на вершине трамплина v можно найти с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Высота трамплина и дальность полета шайбы связаны с временем полета t формулами

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad s = vt.$$

Из записанных выше равенств получим зависимость дальности полета шайбы от высоты трамплина:

$$s = \sqrt{\frac{2h}{g} (v_0^2 - 2gh)} = 2\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2 - \left(h - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2}.$$

Очевидно, что дальность полета будет максимальной при условии

$$h = \frac{v_0^2}{4g} = 3,6 \text{ м},$$

причем сама максимальная дальность

$$s = \frac{v_0^2}{2g} = 7,2 \text{ м}.$$

5. Для системы тело — доска выполняется закон сохранения импульса

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v,$$

где v — скорость системы после того, как тело перестало скользить относительно доски.

Изменение кинетической энергии тела обусловлено работой силы трения $F_{\text{тр}1}$, действующей на тело со стороны доски:

$$\frac{m_1 v^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = -F_{\text{тр}1} l_1,$$

где l_1 — путь, пройденный телом относительно плоскости. С другой стороны, кинетическая энергия доски увеличивается за счет работы силы трения $F_{\text{тр}2}$, действующей на доску со стороны тела:

$$\frac{m_2 v^2}{2} = F_{\text{тр}2} l_2,$$

где l_2 — путь, пройденный доской относительно плоскости. Складывая почленно два последних уравнения и учитывая, что $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = \mu m_1 g$, получим

$$\frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = -\mu m_1 g (l_1 - l_2) = -\mu m_1 g l$$

Решая это уравнение совместно с уравнением, описывающим закон сохранения импульса, находим искомое значение пути l :

$$l = \frac{m_1 m_2 v_0^2}{2\mu g (m_1 + m_2)} \approx 0,7 \text{ м}.$$

6. В обоих случаях сила давления газа на поршень уравнивается изменением силы упругости пружины:

$$p_1 S = kh_1, \quad p_2 S = kh_2,$$

где p_1 и p_2 — давления газа, S — площадь поршня, k — жесткость пружины, h_1 и h_2 — изменения длины пружины. Из этих равенств находим отношение давлений p_1/p_2 :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

С другой стороны, отношение давлений можно получить с помощью уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$p_1 h_1 S = \frac{m}{\mu} RT_1, \quad p_2 h_2 S = n \frac{m}{\mu} RT_2,$$

где m — исходная масса газа под поршнем, откуда

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1 h_2}{n T_2 h_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{T_1 h_2}{n T_2 h_1},$$

или

$$h_2 = h_1 \sqrt{\frac{n T_2}{T_1}} \approx 22,7 \text{ см}.$$

7. В момент перерезания нити скорость шариков равна нулю, и, следовательно, их центростремительное ускорение также равно нулю. Касательное ускорение шариков обеспечивается проекциями кулоновской силы и силы тяжести:

$$ma = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} \frac{\sqrt{3}}{2} - mg \frac{1}{2}.$$

Искомую скорость шариков можно найти с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} - 2mgl \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2l} + 2 \frac{mv^2}{2}.$$

Решение этих двух уравнений для скорости v дает

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6} l(2a - 5g)} \approx 0,66 \text{ м/с}.$$

8. Запишем условие равновесия шарика в первоначальном положении:

$$qE = mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Изменение механической энергии шарика обусловлено работой сил электрического поля:

$$-mgl(\cos \beta - \cos \alpha) = qEl(\sin \alpha + \sin \beta),$$

где β — угол максимального отклонения

шарика, l — длина нити. Учитывая записанное выше условие равновесия шарика, имеем

$$\cos \alpha - \cos \beta = \operatorname{tg} \alpha (\sin \alpha + \sin \beta),$$

или

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \operatorname{tg} \alpha \left(2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Последнее уравнение дает

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\beta - \alpha}{2} = \alpha, \quad \beta = 3\alpha.$$

В положении максимального отклонения скорость шарика равна нулю, и, следовательно, центростремительное ускорение также равно нулю:

$$0 = T - mg \cos \beta - qE \sin \beta.$$

Решая это уравнение, находим искомую силу натяжения:

$$T = mg \cos \beta + qE \sin \beta = mg(\cos \beta + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \beta) = mg(\cos 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin 3\alpha) =$$

$$= mg \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \approx 8,7 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

9. Непосредственно после замыкания ключа заряд и напряжение на конденсаторе равны нулю. Поэтому ток I_1 , протекающий через источник в этот момент времени, равен

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}.$$

После того как конденсатор зарядится, ток через него не течет. Следовательно,

$$I_2 = \frac{U_2}{R_1 + R_2},$$

где I_2 — ток, протекающий через источник после зарядки конденсатора. Напряжения на источнике тока U_1 и U_2 связаны с его ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r формулами

$$U_1 = \mathcal{E} - I_1 r, \quad U_2 = \mathcal{E} - I_2 r.$$

Исключив из этих уравнений величину r , получим

$$\mathcal{E} = \frac{U_1 I_2 - U_2 I_1}{I_2 - I_1} = \frac{U_1 U_2 R_2}{U_1 (R_1 + R_2) - U_2 R_1} = 12 \text{ В.}$$

10. Действительное изображение шарика будет существовать, когда шарик находится выше фокальной плоскости линзы. Максимальная высота подъема шарика H равна

$$H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Время полета шарика τ над фокальной плоскостью можно найти из уравнения

$$H - F = \frac{g(\tau/2)^2}{2},$$

где $F = 1/D$ — фокусное расстояние линзы. Отсюда

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2(H-F)}{g}} = 2 \frac{v_0}{g} \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2 D}} \approx 1,5 \text{ с.}$$

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. —1, 1. 2. 1,25. 3. 1. 4. 10. 5. 64. 6. 4. 7. 0,5. 8. 5. 9. 8. 10. 22,5.

Вариант 2

1. 3,75. 2. 0,625. 3. 3. 4. 5. 5. 2,5. 6. 6. 7. 0,5.

8. 5. 9. 14. 10. 2,25.

Физика

Вариант 1

1. $H = \frac{g}{2} \left(\frac{l}{g} + \frac{\tau^2}{2} \right)^2 \approx 240 \text{ м}$ (здесь $\tau = 1 \text{ с}$).

2. $F = mg \operatorname{ctg} \alpha = 19,6 \text{ Н}$.

3. $v = \sqrt{2g(|AB| + \mu|DB|)} = 7 \text{ м/с}$.

4. $F = \frac{mgl}{2\sqrt{l^2 - a^2/4}} = 49 \text{ Н}$.

5. $p = \rho gh(l_1 + l_2)/(l_2 - l_1) = 62,2 \text{ кПа}$ (здесь $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ — плотность ртути).

6. $\Delta l = la(t_1 - t_2)/(1 + at_1) = 0,29 \text{ м}$.

7. $I = C_1 C_2 (U_1 + U_2)/(r(C_1 + C_2)) = 6 \cdot 10^{-4} \text{ А}$.

8. $m = \frac{4Dl^2 \rho W}{(0,92 - 0,08)U^2} \approx 2140 \text{ кг}$ (здесь $D = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ — плотность, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ — удельное сопротивление меди).

9. $I_1/I_2 = \sqrt{3} \approx 1,7$.

10. $S = \pi h^2/(n^2 - 1) \approx 0,02 \text{ м}^2$.

Вариант 2

1. $v_0 = (3l_1 - l_2)/(2t) = 3,75 \text{ м/с}$.

2. $l' = l\mu/(1 + \mu) = 0,25 \text{ м}$.

3. $\Delta P = \sqrt{2}mv = 14 \text{ Н} \cdot \text{с}$.

4. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2\mu} = 45^\circ$.

5. $A = mR\Delta T/M \approx 3320 \text{ Дж}$ (здесь $M = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ — молярная масса углекислого газа).

6. $p_n = \frac{mRT}{MV_{\Phi}/100\%} \approx 1961 \text{ Па}$ (здесь $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ — универсальная газовая постоянная, $M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ — молярная масса воды).

7. $\mathcal{E} = 4U = 2 \text{ В}$.

8. $T = 2\sqrt{\frac{l}{g + qE/m}} \approx 1,1 \text{ с}$.

9. $B = \mathcal{E} \tau/a^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$.

10. $b' = b \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} \approx 10,3 \text{ см}$.

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $f'(x) = \frac{1}{6} x^{-5/6}$ при $x > 0$, $x \neq \sqrt{3}$.

2. См. рис. 12

3. Промежутки убывания] $-\infty$; 0 [и] $2\sqrt{2}$; $+\infty$ [. Промежутки возрастания] 0; $2\sqrt{2}$ [. Точка минимума $x = 0$, $f(0) = 0$. Точка максимума $x = 2\sqrt{2}$, $f(2\sqrt{2}) = 4$.

4. $\left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$.

5. $\frac{4}{3} \pi S \sqrt{2S \operatorname{ctg} \alpha}$

Вариант 2

1. $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ при $x > 0$, $x \neq 1$.

2. $\left] \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \right] \mid \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$.

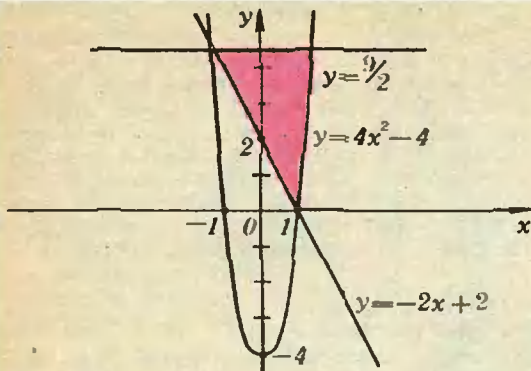


Рис. 12.

3. Промежутки возрастания $]-2,5; -1,5[$ и $]0; 0,5[$. Промежутков убывания $]-1,5; 0[$.
 $f_{\max} = f(-1,5) = 4$. $f_{\min} = -\frac{16}{9}$ при $x = -2,5$.
4. $\left\{ -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\}$.
5.
$$\frac{S \sqrt{S \sin \alpha}}{\sqrt{\sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}}$$

Задачи устного экзамена

1. Указание. Если M' — точка пересечения продолжения высоты CD с описанной окружностью, то $\widehat{M'BA} = \widehat{M'CA} = \widehat{ABM}$.
2. Указание. Если данная функция периодична и T ее период, то $\cos \sqrt[3]{T} = 1$, $\cos \sqrt{2T} = -\cos \sqrt[3]{T}$, а эти два соотношения противоречат иррациональности числа $\sqrt[3]{2}$.
3. Указание. При любых положительных a и b имеет место неравенство $a + b > 2\sqrt{ab}$. Поэтому

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x} + \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 4x} + \frac{\sin^2 4x}{\sin^2 x} > 2 \left(\frac{|\sin x|}{|\sin 3x|} + \frac{|\sin 3x|}{|\sin x|} \right) > 4.$$

4. Указание. Сначала докажите, что $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} > \sin \alpha + \cos \alpha$.

6. а) $f'(1) = 2 \ln 2$; б) $f(1) = \frac{1}{2}$.

7. $x \neq \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Указание. Воспользуйтесь неравенством $a + b > 2\sqrt{ab}$ при $a > 0$, $b > 0$.

8. Указание. В левой части неравенства стоит число $\lg a$, где $a = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100}$.

Достаточно доказать, что $a < \frac{1}{10}$. Для этого

перемножьте неравенства $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$; $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$;

$$\frac{5}{6} < \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{100}{101}.$$

9. 3. 10. $1/8$.

Вариант 1

1. 31. 2. 0. 3. 200. 4. $-0,21$. 5. 0,75. 6. 8. 7. 2. 8. 1. 9. 9. 10. 0. 11. 0,5. 12. 64. 13. -1 . 14. -13 . 15. 1. 16. 8. 17. 0. 18. 2. 19. 0,97. 20. 4.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

2. $A_{AB} > 0$; $A_{BC} = A_{DA} = 0$; $A_{CD} < 0$; $A_{ABCD} = 0$.

3. $v = v_0 \frac{m}{M} \cos \alpha \approx 0,52$ м/с.

4. $l = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right)$.

5. $\frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{1 + (T_1/T_2) + (T_1/T_3)} \approx 2,2$.

Вариант 2

2. См. рис. 13.

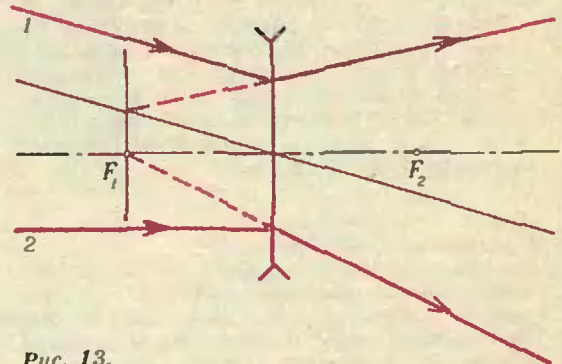


Рис. 13.

3. $F_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 l^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-3}$ Н; $F_2 = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{16\pi \epsilon_0 l^2} \approx 5,1 \cdot 10^{-3}$ Н.

4. $H = l + \frac{N}{k} + \frac{N^2}{2kmg}$.

5. $\frac{U'}{U} = \sqrt{\frac{\Delta W}{tP\eta/100\%}} = 3$ (здесь $t = 24$ ч).

Задачи устного экзамена

1. $v_1 = ((m_1 + m_2)v_0 - m_2 v_2)/m_1 \approx 267$ м/с.
 2. $Q = q - m/(nV) = 700$ кг/м³.
 3. $A = \sqrt{Bl} = 0,15$ Дж; проводник должен перемещаться перпендикулярно линиям магнитной индукции.

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 1)

1. В этой записи, вообще говоря, каждая цифра может играть одну из трех ролей: быть номером буквы, быть первой цифрой двузначного номера буквы или второй его цифрой. Цифра 0 не может выступать ни в первой, ни во второй роли, а цифра 5 — во второй роли. Отсюда первая буква имени имеет номер 20 — Т, а остальные разбиваются на два блока 115 и 33. Блок 115 можно представить тремя способами: 1—1—5, 11—5, 1—15, что соответствует сочетаниям ААД, ИД, АН. А блок 33 — двумя способами: 3—3 и 33, что соответствует сочетаниям ВВ и Я. Таким образом получаем 6 возможных слов: ТААДВВ, ТААДЯ, ТИДВВ, ТИДЯ, ТАВВВ и ТАНЯ. Очевидно, что имя девочки — Таня.
2. Коля купил 3 пирожка, Витя — 6, Женя — 5 пирожков.
3. См. рис. 14.

4. Ясно, что эти числа не могут быть однозначными. Они не могут быть и двузначными, так как из условия следует, что для числа ab должно выполняться соотношение: $10a +$



Рис. 14.

$+b=13(a+b)$ или $3a+12b=0$. Для трехзначных чисел из уравнения $100a+10b+c=13(a+b+c)$, то есть $29a=b+4c$ получаем три решения 195, 156 и 117. Четырех- и более значных чисел с таким свойством не существует. 5. Это правило применимо лишь в северных странах. Южнее экватора дело обстоит как раз наоборот, а на экваторе месяц бывает повернут выпуклостью вверх или вниз.

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1984, № 11)

Задание 21 (Г. Каспарян, 1936 г.). 1. $h5+$ $Kr6$ 2. $Kf7+$ $Kr:h5$ 3. $Le5+$ $Krh4$ 4. $Kg5$ $f1\Phi+$ 5. $Kf3+$ $Krh3$ 6. $Lb5+$ $Kpg2$ 7. $Lh2\times$.
Задание 22 (Г. Каспарян, 1956 г.). 1. $\Phi h1+$

(1. $c6+$ $Kr:c6$ 2. $\Phi a6+$ $Cb6$ 3. $\Phi c4+$ $Cc5+$ 4. $\Phi:c5+$ $Krb7$ с ничьей) 1... $Kpb8$ (1... $Kra6$ 2. $\Phi f1+$ $Krb7$ 3. $\Phi f3+$ $Krb8$ 4. $\Phi f8+$ и ведет к основному варианту) 2. $\Phi h8+$ $Krb7$ 3. $c6+$ $L:c6$ 4. $\Phi h1$ $Krb6$ 5. $\Phi g1+$! (ферзь начинает победный подьем по «лестнице», не годится) 5... $Cb8!$ 6. $\Phi b5+$ $Kra7$ 7. $\Phi:c6$ пат). 5... $Krb7$ (5... $Kra6$ 6. $\Phi f1+$ $Krb7$ 7. $\Phi f3$) 6. $\Phi g2$ $Krb6$ 7. $\Phi f2+$ $Krb7$ 8. $\Phi f3$ $Krb6$ 9. $\Phi e3+$ $Krb7$ 10. $\Phi e4$ $Krb6$ 11. $\Phi d4+$ $Krb7$ 12. $\Phi d5$, и белые выигрывают.

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1984, № 12)

Оба этюда составлены классиком шахматной композиции Л. Куббелем в 1924-м году.

Задание 23. 1. $Cb3$ $d3!$ 2. $Cc4!$ $Krc2$ 3. $Ca2$ $Kr:d2$ 4. $d6$. Если теперь черные попытаются провести пешку «d», то они гибнут из-за размена ферзей: 4... $Krc1$ 5. $d7$ $d2$ 6. $d8\Phi$ $d1\Phi$ 7. $\Phi c7+$ $Kpd2$ 8. $\Phi d6+$ $Krc1$ 9. $\Phi c5+$ $\Phi c2+$ 10. $\Phi:c2+$ $Kr:c2$ 11. $Kr:g2$ $Kpd2$ 12. $Krf2$. Но в распоряжении черных имеется остроумная патовая ловушка: 4... $g1\Phi+$! 5. $Kr:g1$ $Krc3!$ 6. $d7$ $d2!$ и после 7. $d8\Phi$ $b1\Phi+$ 8. $C:b1$ $d1\Phi+$! 9. $\Phi:d1$ на доске пат. Выигрывает же 7. $d8!$

Задание 24. 1. $Le5$ $Kc8$ 2. $Lg5!$ $Cf7$ ($e6$) 3. $Kc6+$ $Kra8$ 4. $Lb5!$ (4. $La5+$ $Krb7$ 5. $Kd8+$ $Krb6$ с ничьей) 4... $Kb6$ 5. $La5+$ $Krb7$ 6. $Kd8+$. Интересен и другой вариант: 1... $Kra7$ 2. $L:e7$ $Krb6$ 3. $Le8!$ $Cf7$ 4. $Lf8!$ $Cd5$ 5. $Kb3!$ $C:b3$ 6. $Lb8+$.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтынский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. В. Васильев, С. М. Воронин, В. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климаиов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. В. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стассико, И. К. Сурич, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. Н. Вилеккин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ильяев, Т. С. Петрова, А. В. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:

Е. В. Виноделова, Т. А. Доброкотова, М. В. Дубах, Т. Н. Кольченко, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, А. А. Орехов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина
Фото представили:
В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 82/1,
«Квант», тел. 260-33-54

Сдано в набор 18.01.85. Подписано к печати 1.03.85.

Печать офсетная. Усл. кр. отт. 23,8.

Бумага 70×108 1/16.

Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,63. Т-07411.

Тираж 177698 экз. Цена 40 коп. Заказ 91

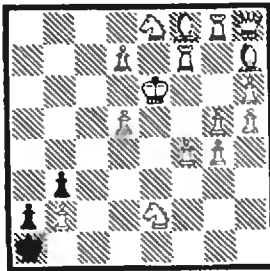
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гиж.

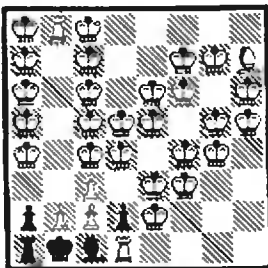
ВОЗВРАЩЕНИЕ ФИГУР

В обычных шахматных задачах полагается, чтобы первый ход был единственным. Однако существует в композиции так называемая тема возврата, где это правило можно нарушать сколько угодно раз, и чем больше вступительных ходов, тем лучше! С некоторыми рекордами такого рода мы сегодня ознакомимся.



А. Эллерман, Д. Оудот. Мат в 2 хода (9 решений).

Эта задача — основоположница темы. К цели ведет любое перекрытие диагонали a1 — h8 ладьями, конями и королем. Ответным ходом черный король берет пешку b2, и белая фигура возвращается на место, объявляя мат. Любопытно, что на доске расположен полный комплект белых фигур и пешек, и удаление любой из них нарушит идею — необходимость в возвращении на место некоторых фигур отпадет.

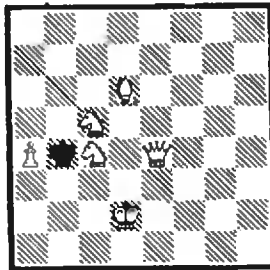


З. Энкин. Мат в 2 хода (41 решение).

Перед нами «вся королевская рать»! Сорок ходов

королей на поля b4, b5, b6, b7, e4, f5, g6, а также маневр Cg8! решают дело. Черный король берет пешку b2 или c2, и возвращение белой фигуры на место приводит к мату.

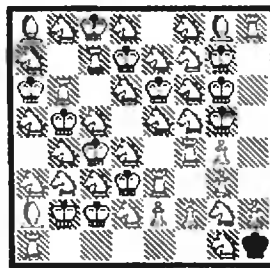
В рамках ортодоксальных задач, в которых не требуется сверхкомплект шахматных фигур, лучшим произведением является такое.



В. Сидоров. Мат в 2 хода (21 решение).

Пятнадцать отступлений ферзем или шесть слонами и затем возвращение их на место приводит к мату черному королю. Если в первой задаче белые были представлены полным набором фигур, то здесь другой примечательный штрих — замысел осуществлен в жанре миниатюры — на доске всего семь фигур!

Рекорд же, очевидно, следует искать в «сказочных шахматах».

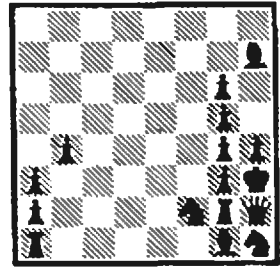


А. Шуряков, М. Горнславский. Мат в 2 хода (70 решений).

Если в задаче Энкина присутствовала вся королевская рать, то теперь на доске находится еще и целый табун коней... Последняя необычная диаграмма отличается также внешней симметрией относительно диагонали a8 — h1 (несколько небольших нарушений не в счет). После любого из ходов белых королей, ладей, слонов и коней и возвращения их на место мат дается либо по этой диагонали, либо по одной из крайних линий.

В сегодняшней «шахматной страничке» оказалось слишком много белых коро-

лей, и поэтому в заключение приводим одну задачу-шутку, в которой белого короля вообще нет на доске, как, впрочем, и остальных белых фигур. Но в отличие от самой первой задачи на сей раз полностью представлена армия черных фигур.

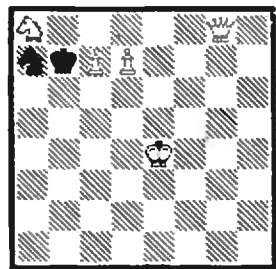


Ф. Бондаренко. Белые начинают и делают ничью.

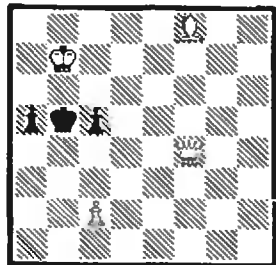
Поразительный случай! Несмотря на то, что у черных уцелели все фигуры, а у белых пока нет даже предводителя, им удастся спастись. Оказывается, в данный момент король завершает ход, почему его и не видно. На что же это за спасительный ход?

1.Krb2:a1! Вот в чем дело. Король стоял на b2, и пешка поспешно объявила ему шах. Теперь черные, хотя и имеют самый большой материальный перевес, который только возможен в шахматах, не в состоянии предотвратить пат.

Конкурсные задания



5. Мат в два хода.



6. Мат в два хода.

Срок отправки решений — 25 мая 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5, 6»).

Мы продолжаем начатую в прошлом номере серию чертежей к стереометрическим задачам, цель которой помочь читателям развить пространственное воображение. При самостоятельном решении задач такие картинки надо стараться представлять себе мысленно. (Как правило, точные чертежи можно построить, только решив задачу хотя бы частично, к тому же непосредственно для решения они чаще всего не нужны.) Условие задачи этого номера приводится ниже, а ее решение вы найдете внутри журнала под рубрикой «Наша обложка».

Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45° . Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается продолжения ребра BS за вершину S . Через центр шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

